MACS – 11º Ano
3ª Aula

Prof. Álvaro Velosa

4 - Calcule o valor médio da população e a média das médias amostrais. Que conclusões pode tirar?

Valor Médio da população:

população: 32; 36; 44 e 56

$$\mu = \frac{32 + 36 + 44 + 56}{4} = 42$$

Média das médias amostrais:

(Podemos recorrer à distribuição de amostragem)

$\bar{X}$	32	34	36	38	40	44	46	50	56
Probabilidade	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$E(\bar{X}) = 32 \times \frac{1}{16} + 34 \times \frac{1}{8} + 36 \times \frac{1}{16} + 38 \times \frac{1}{8} + 40 \times \frac{1}{8} + 44 \times \frac{3}{16} + 46 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{1}{8} + 56 \times \frac{1}{16} = 42$$

<u>Conclusão</u>: $\boldsymbol{E(\bar{X}) = \mu}$, O valor médio da distribuição de amostragem da média é igual ao valor médio da população que pretendíamos estimar, dizemos que **o estimador é não enviesado.**

Será que acontece o mesmo com o desvio padrão?

Desvio padrão populacional

população : 32; 36; 44 e 56 ; μ = 42

- Recorrendo à calculadora gráfica:

L_1	32	36	44	56
L_2	1	1	1	1

$$\boldsymbol{\sigma} = 9{,}16515138$$

- Analiticamente

$$\sigma = \sqrt{\frac{(32-42)^2 \times 1 + \cdots + (56-42)^2 \times 1}{4}} = \sqrt{\frac{336}{4}} = \sqrt{84}$$

Desvio padrão da distribuição de amostragem

- Recorrendo à calculadora gráfica:

L_1	32	34	36	38	40	44	46	50	56
L_2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\sigma_{\bar{x}} = 6{,}48074069$$

Analiticamente, de modo análogo ao efetuado com desvio padrão populacional, obteríamos:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{(32-42)^2 \times \frac{1}{16} + \cdots + (56-42)^2 \times \frac{1}{16}} = \sqrt{42}$$

$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{84}$ e $\boldsymbol{\sigma_{\overline{x}}} = \sqrt{42}$ logo $\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma_{\overline{x}}}$

Após a análise dos valores exatos concluímos que:

$\sqrt{42} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{2}}$, ou seja, $\boldsymbol{\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, onde $\boldsymbol{n}$ representa o número de elementos das amostras.

Observação: Ao **desvio padrão da distribuição de amostragem** também se chama **erro padrão**.

O desvio padrão (erro padrão) indica a variabilidade das estatísticas.

<u>Aumentando a dimensão da amostra será que diminui a variabilidade das estatísticas?</u>

- **Proposta de trabalho:**

Ex. Consideremos uma população constituída pelas idades de quatro camionistas, de uma empresa de transportes, 32; 36; 44 e 56.

1 - Quantas amostras diferentes (com reposição) de dimensão três é possível definir?

2 - Calcule a média de idades, dos camionistas, de cada uma das amostras obtidas.

3 - Elabore uma tabela com a distribuição de amostragem do estimador média.

4 - Calcule a média das médias amostrais e o valor médio da população. Que conclusões pode tirar?

5- Compara o desvio padrão $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}}$ no caso de amostras de dimensão 2 com o desvio padrão $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}}$ no caso de amostras de dimensão 3. Que conclusões pode tirar?

Com as resoluções anteriores verificas que:

O aumento da dimensão da amostra, a partir da qual é calculado o estimador, faz diminuir a variabilidade das estimativas.

Teorema do limite central (TLC)

Seja X uma população, com valor médio $\boldsymbol{\mu}$ e desvio padrão $\boldsymbol{\sigma}$, da qual se recolhem amostras de dimensão $\boldsymbol{n}$.

Então, se $\boldsymbol{n} \geq 30$, **a distribuição de amostragem da média $\bar{X}$ pode ser aproximada a uma distribuição normal** (segue um modelo normal) **com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.**

Podemos escrever que:

$$\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Exercício:

Consideremos uma população de uma determinada espécie animal cuja esperança média de vida é $17{,}25$ anos, com um desvio padrão de $3{,}05$ anos.

Se tivermos uma amostra dessa população, de dimensão 40, como será de esperar que seja a distribuição de amostragem da média?

Consideremos uma população de uma determinada espécie animal cuja esperança média de vida é $17{,}25$ anos, com um desvio padrão de $3{,}05$ anos.
Se tivermos uma amostra dessa população, de dimensão 40, como será de esperar que seja a distribuição de amostragem da média?

Proposta de resolução

Dados:

- População: μ = 17,25; σ = 3,05
- Amostra: n = 40

Como $n \geq 30$, pelo TLC, a distribuição de amostragem da média pode seguir um modelo normal com:

$$\boldsymbol{E(\bar{X}) = \mu} = 17{,}25 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}05}{\sqrt{40}} \approx 0{,}482$$

podemos escrever que:

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, isto é, $\bar{X} \sim N(17{,}25; 0{,}482)$

Exercício

Numa empresa, sabe-se que o valor médio dos ordenados dos funcionários é 900 €, com um desvio padrão 78 €.

1. Determine o valor médio e o desvio padrão da distribuição de amostragem da média para amostras de dimensão 36.

2. Calcule a probabilidade da média pertencer ao intervalo [887, 926]

Numa empresa, sabe-se que o valor médio dos ordenados dos funcionários é 900 €, com um desvio padrão 78 €.

1. Determine o valor médio e o desvio padrão da distribuição de amostragem da média para amostras de dimensão 36.

Proposta de resolução

Dados:

- População: $\mu = 900; \sigma = 78$

- Amostra: $n = 36$

Como $n \geq 30$, pelo TLC, a distribuição de amostragem da média pode seguir um modelo normal com:

$$\boldsymbol{E(\overline{X}) = \mu} = 900$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{78}{\sqrt{36}} = 13$$

2. Calcule a probabilidade da média pertencer ao intervalo [887, 926].

Por 1. temos $\bar{X} \sim N(900; 13)$

recorrendo à calculadora gráfica

Casio:

P($\bar{X}$ $\in$ $[887, 926]$) $=$ P(887 ≤ $\bar{X}$ $\leq$ 926) =

$= \text{normal ncd} \begin{pmatrix} Lower{:}887 \\ Upper{:}926 \\ \sigma{:}13 \\ \mu{:}900 \end{pmatrix} = 0{,}81859461 \approx 82\%$

Texas:

P($\bar{X}$ $\in$ $[887, 926]$) $=$ P(887 ≤ $\bar{X}$ $\leq$ 926) $=$

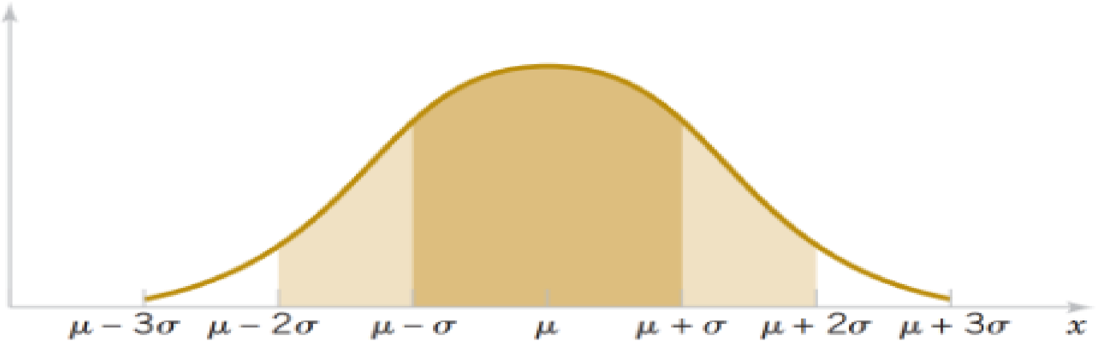
$=$ normal cdf (887, 926,900,13) $=$ 0,81859461 ≈ 82%

$\bar{X} \sim N(900; 13)$

2. Outra proposta de resolução para calcular P($\bar{X} \in [887, 926]$):

Recorrendo às características da curva normal, e tendo em conta os valores das áreas já definidos:

P(μ-σ < X < μ+σ) ≈ 0,6827
P(μ-2σ < X < μ+2σ) ≈ 0,9545
P(μ-3σ < X < μ+3σ) ≈ 0,9973



vem:

$$P(\bar{X} \in [887, 926]) = P(887 \leq \bar{X} \leq 926) =$$

$$= P(\mu-\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx \frac{0{,}6827}{2} + \frac{0{,}9545}{2} \approx 0{,}8186 \approx 82\%$$

Questão 8.2 do exame de 2018 - 1ª Fase

Em maio de 2017, Mariana analisou os gastos em viagens dos clientes da agência e verificou que, nesse mês, os clientes gastaram, em média, 1200 euros, com um desvio padrão de $\boldsymbol{a}$ euros. Nessas condições, para uma amostra de dimensão 100, o desvio padrão da distribuição de amostragem da média é bem aproximado pelo valor 8.

Assim, o valor de $\boldsymbol{a}$ é:

(A) $0{,}8$ (B) 8 (C) 80 (D) 800