TELENSINO 2020

MATEMÁTICA A – 10ºANO

Gracinda Santos

Exercício 3 – Aula Nº1

Seja f a função de domínio IR, definida por $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.
3.1 Indique o contradomínio, as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função.

3.2 Estude a função quanto à monotonia, extremos, zeros e sinal.

Resolução

Exercício 3 – Aula Nº1

Seja f a função de domínio IR, definida por $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

3.1 Indique o contradomínio, as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função.

Exercício 3 – Aula Nº1

Seja f a função de domínio IR, definida por $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

3.2 Estude a função quanto à monotonia, extremos, zeros e sinal.

A função f definida por $\boldsymbol{f(x) = a(x-h)^2 + k}$, com a, h e $k \in IR$ e $a \neq 0$, também pode ser escrita na forma de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in IR$ e $a \neq 0$.

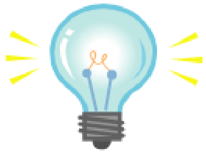
Assim,

Chama-se **função quadrática** a uma função real de variável real definida por um polinómio do 2.ºgrau.

Retomando o exercício 3 da aula anterior , vimos que:

$$f(x) = -2(x+1)^2 + 8 \Leftrightarrow f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

Como escrever a expressão de uma função f na forma y $= a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ se f estiver definida na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$?



Exemplo 1 Consideremos a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$.
Vamos transformar a expressão analítica de f na forma $a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$.

Vamos utilizar o **método do completar do quadrado**, estudado no 9ºano.

Processos para determinar as coordenadas do vértice de uma parábola, caso a sua expressão esteja definida na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Consideremos f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Como determinar, analiticamente, as coordenadas do vértice da parábola que representa f ?

1º Transformar a expressão $x^2 - 2x - 3$ na forma $a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$, utilizando o método do completar do quadrado.

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 1^2 - 3 = (x-1)^2 - 4$$

Assim, temos que $f(x) = (x-1)^2 - 4$ logo o vértice da parábola representada pela função f tem de coordenadas $(1, -4)$.

Processos para determinar as coordenadas do vértice de uma parábola, caso a sua expressão esteja definida na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Consideremos f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Como determinar, analiticamente, as coordenadas do vértice da parábola que representa f ?

2º Utilizar a fórmula do vértice: $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Identifica-se o valor de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ na expressão da função f, $a = 1$ e $b = -2$

Abcissa do vértice: $x_V = \frac{-(-2)}{2\times1} = 1$

Ordenada do vértice: $y_V = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4$

Assim, concluímos que as coordenadas do vértice são $(1, -4)$.

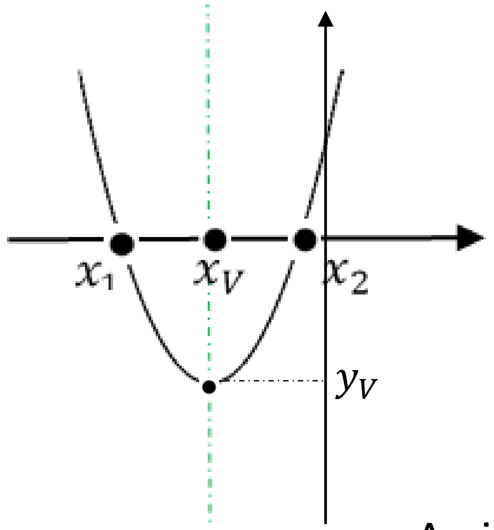
Processos para determinar as coordenadas do vértice de uma parábola, caso a sua expressão esteja definida na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Consideremos f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Como determinar, analiticamente, as coordenadas do vértice da parábola que representa f ?

3º Recorrer ao calculo dos zeros da função, x_1 e x_2 , uma vez que:

$x_V = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $y_V = f(x_V)$



Calcular dos zeros da função, $f(x) = 0$

Aplicando a fórmula resolvente, vem que:

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 3$

$x_V = \frac{-1+3}{2} = 1$ e $y_V = f(1) = -4$

Assim, concluímos que as coordenadas do vértice são $(1, -4)$.

RECORDA

O número de zeros da função quadrática:

$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

depende do sinal de

$\Delta = b^2 - 4ac$

(binómio discriminante).

- Se $\Delta > 0$ há dois zeros.
- Se $\Delta < 0$ não há zeros.
- Se $\Delta = 0$ há um só zero.

Fórmula Resolvente

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

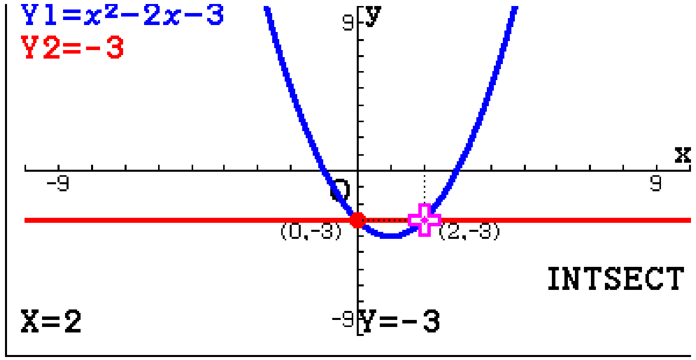
Processos para determinar as coordenadas do vértice de uma parábola, caso a sua expressão esteja definida na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Consideremos f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Como determinar, analiticamente, as coordenadas do vértice da parábola que representa f ?

4º Identificar dois objetos da função com a mesma ordenada.
No caso particular, $\boldsymbol{f(x) = c}$

$$f(x) = -3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 2$$



$$x_V = \frac{0+2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y_V = f(x_V) = f(1) = -4$$

O vértice da parábola representada pela função f tem de coordenadas $(1, -4)$.

Este processo é muito útil quando a função não tem zeros.

Exemplo 2

Consideremos a função g, de domínio IR, definida por $g(x) = x^2 + 2x + 4$.
Vamos determinar, analiticamente, as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico da função $g(x) = x^2 + 2x + 4$.

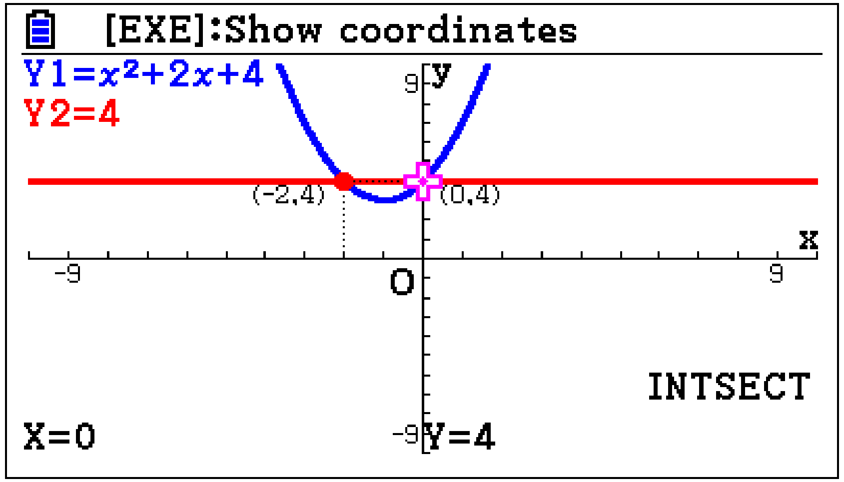
$$g(x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = -2$$



$$x_V = \frac{0+(-2)}{2} = -1 \quad \text{e} \quad y_V = g(x_V) = g(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 4 = 3$$

O vértice da parábola representada pela função g tem de coordenadas $(1, 3)$.

Sinal de uma função quadrática – Inequações do 2ºgrau

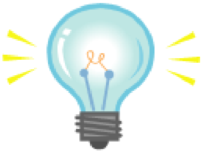
Exemplo 3

Consideremos a função f, de domínio IR, definida por $f(x) = x^2 + x - 2$.
Vamos determinar, analiticamente, os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0$$ → Inequação do 2ºgrau

Como resolver uma inequação do 2ºgrau?



Como resolver uma inequação do 2ºgrau?

- **1.º Determinar os zeros de *f* :**

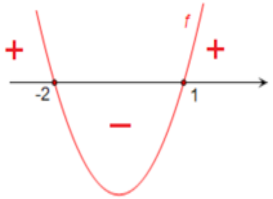
$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$$

- **2.º Estudar o sinal da função *f* :**

Repara que o coeficiente de x^2 é positivo.

Então, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima.



- **Conclusão:**

$$x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

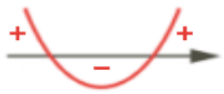
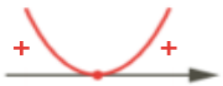
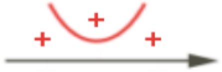
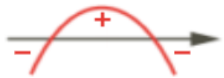
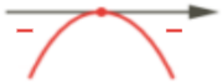
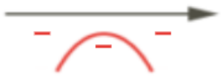
Quando:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[1,+\infty\right[$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,1]$$

Na resolução de inequações do 2ºgrau é útil ter em atenção a informação sobre o sinal de uma função definida por uma expressão do tipo,

$$ax^2+bx+c \ , a \neq 0$$

	Tem 2 zeros	Tem 1 zero	Não tem zeros
$a>0$			
$a<0$			

Extraído do manual **Novo Espaço Matemática A 10ºAno**, Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues – Porto Editora

Exercício 1

Resolve, em IR, a inequação: $\frac{x^2-3x}{2}+3 \geq x(x-2)$.

Exercício 2 Considera as funções quadráticas g e h definidas em IR.

Sabe-se que: $g(x) = (m-3)x^2 - 2x + 8 \quad , \quad m \in IR\backslash\{3\};$

-1 e 3 são zeros da função h;

-2 é mínimo de h.

2.1 Determina os valores de $\boldsymbol{m}$ de modo que o gráfico de $\boldsymbol{g}$ tenha a concavidade voltada para cima.

2.2 Considera $m = 2$.

2.2.1 Escreve $g(x)$ na forma $a(x-h)^2+k \;, a \neq 0.$

2.2.2 Indica as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função g.

2.2.3 Determina, analiticamente, os valores de x para os quais $g(x) < 0$.

2.3 Escreve uma expressão analítica da função h.

Resolução:

Agora é a tua vez!

"Na sala de aula, todos ensinam, todos aprendem."
Em casa, também, poderá ser igual!

"É fazendo que se aprende a fazer aquilo que se deve aprender a fazer." Aristóteles