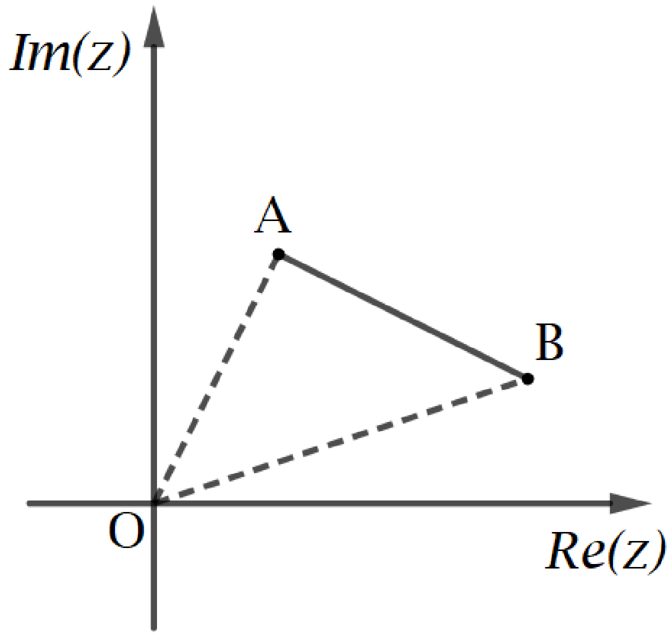
S11 • Domínios planos e condições em variável complexa

Dados dois pontos A e B, afixos dos números complexos z_1 e z_2, respetivamente, tem-se que $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$



$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

$$A = (x_1, y_1) \quad \text{e} \quad B = (x_2, y_2)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| &= |x_2 + y_2 i - (x_1 + y_1 i)| \\ &= |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) i| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3ke^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}, \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre o afixo de z_1 e o afixo de z_2 é igual a $\sqrt{5}$.

Qual é o valor de k?

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2+i \qquad \text{e} \qquad z_2 = -3ke^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 3ki$$

Como a distância entre os afixos de z_1 e de z_2 é igual a $\sqrt{5}$ vem que:

$$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \left|2+i(1-3k)\right| = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sqrt{9k^2-6k+5} = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{9k^2-6k+5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \;\Leftrightarrow$$

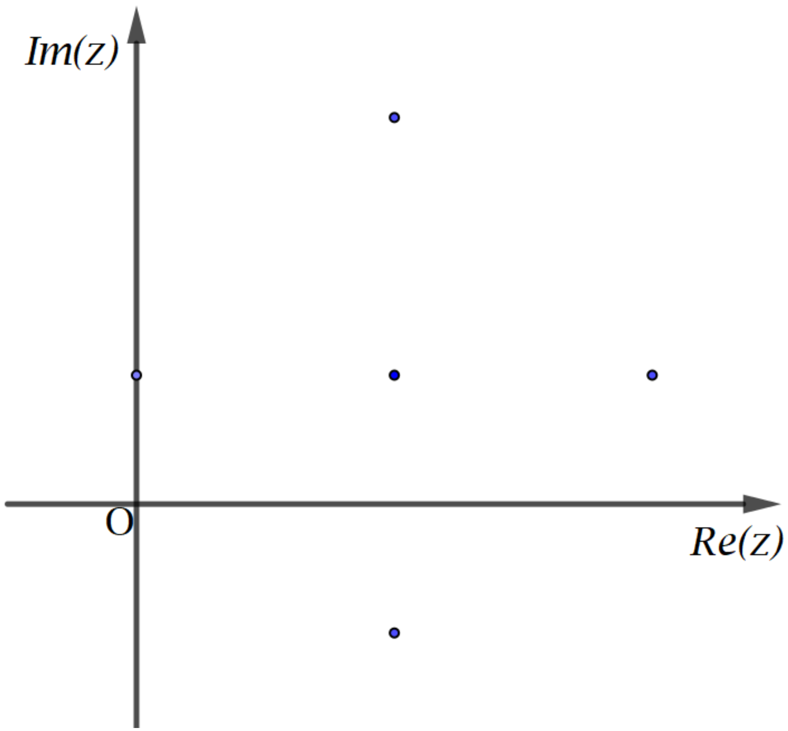
$$\Leftrightarrow\; 9k^2-6k=0 \;\Leftrightarrow\; k=0 \;\vee\; k=\frac{2}{3}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$ temos que $k = \frac{2}{3}$

Qual é o conjunto de pontos do plano complexo que estão à distância 2 do afixo de $2+i$?

$$\left|z-(2+i)\right|=2$$

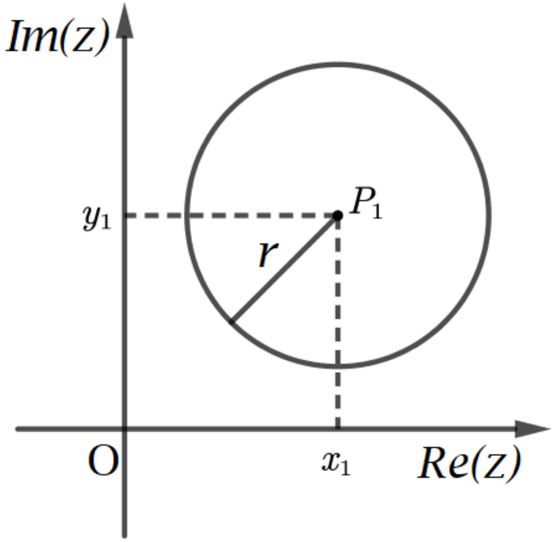
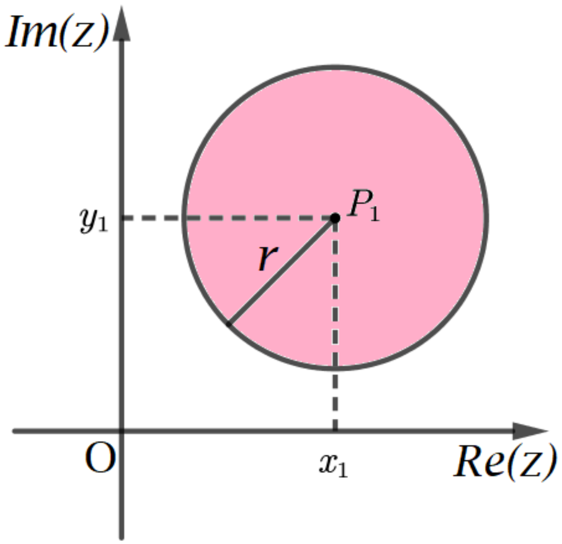
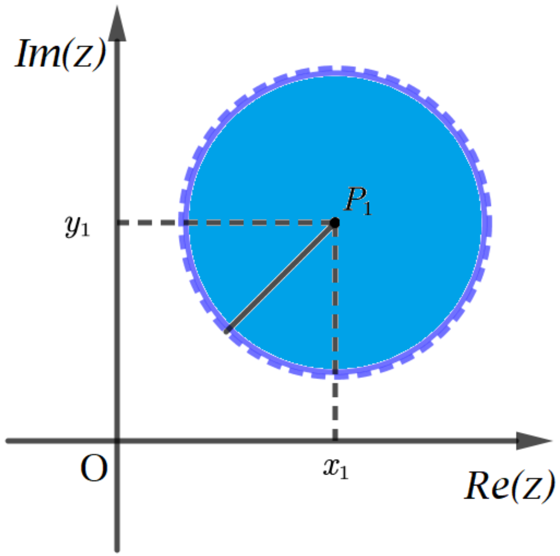
Um número complexo z satisfaz esta condição se a distância do seu afixo ao afixo de $2+i$ for igual a 2 .



O lugar geométrico dos pontos que estão à distância de 2 de um ponto fixo é a **circunferência de centro nesse ponto e raio igual a** 2**.**

Circunferência e círculo

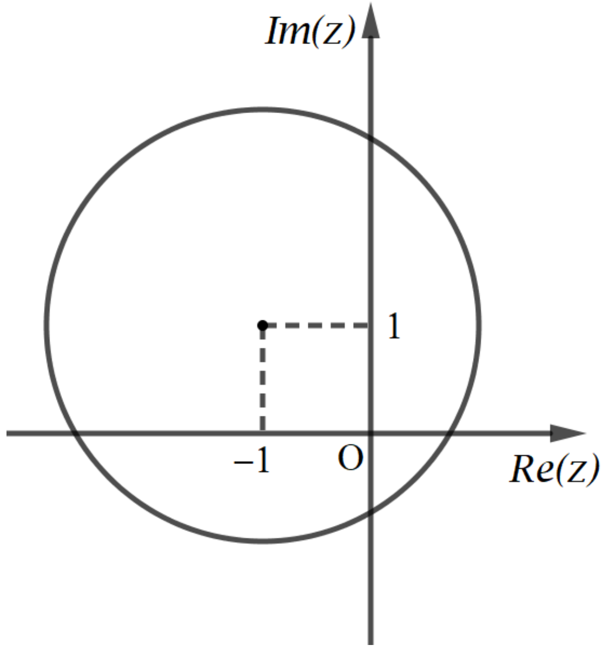
Seja P_1 o afixo do número complexo $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $r > 0$

$\lvert z - z_1 \rvert = r$	$\lvert z - z_1 \rvert \leq r$	$\lvert z - z_1 \rvert < r$
		
Circunferência de centro no afixo de z_1, o ponto P_1, e de raio r	Círculo de centro no afixo de z_1, o ponto P_1, e de raio r	Parte interna da circunferência de centro no afixo de z_1, o ponto P_1, e de raio r

Represente geometricamente a região do plano definida pelas condições seguintes:

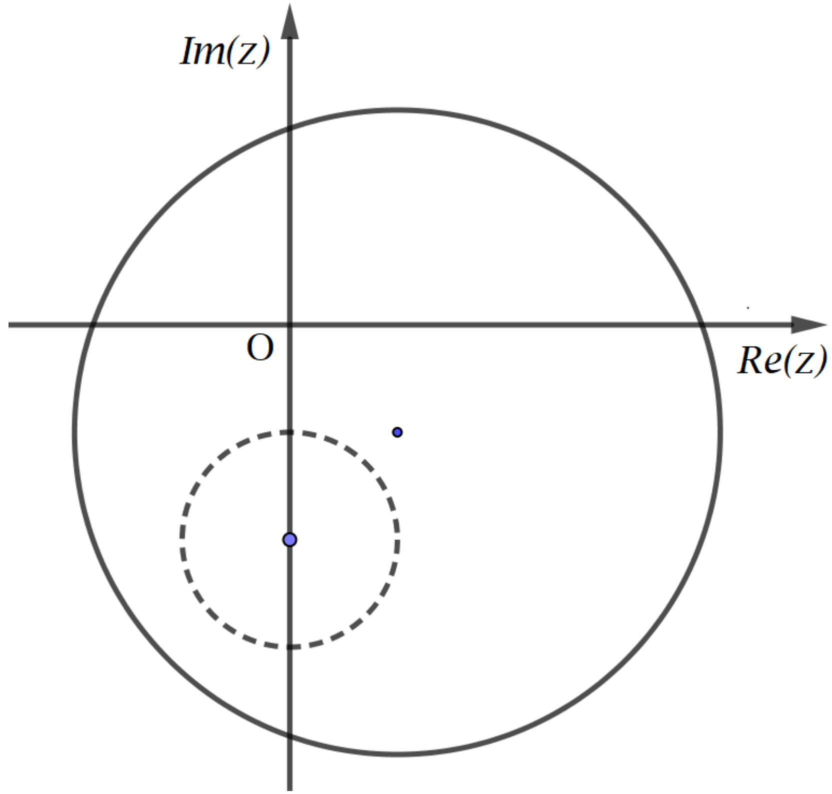
1.

$$\left|z+1-i\right| \leq 2$$



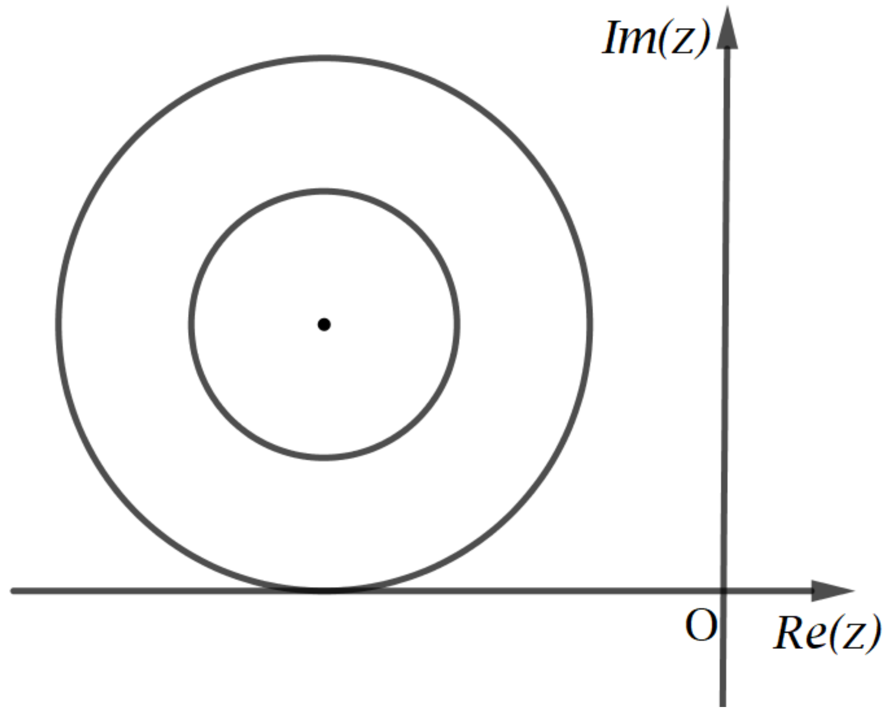
2.

$$\left|2i+z\right|>1 \ \wedge \ \left|z-1+i\right|\leq 3$$

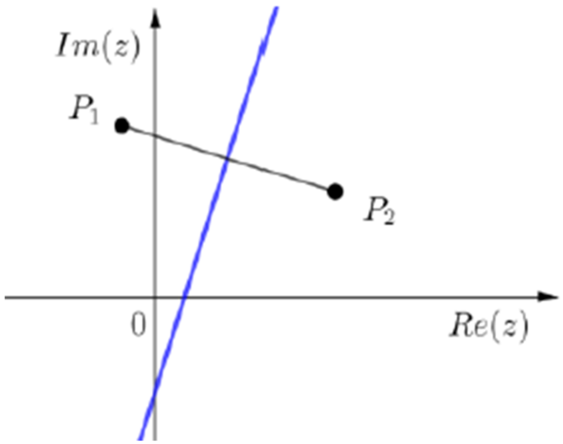
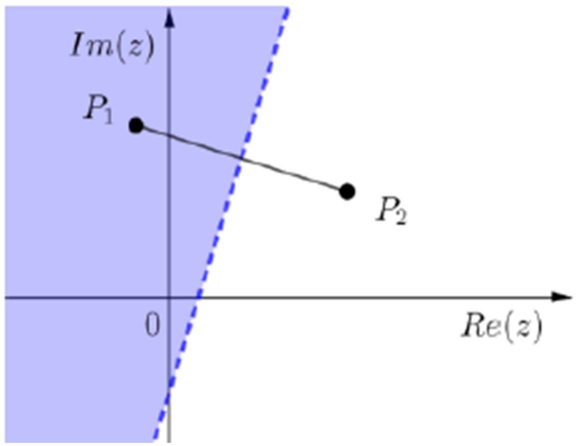
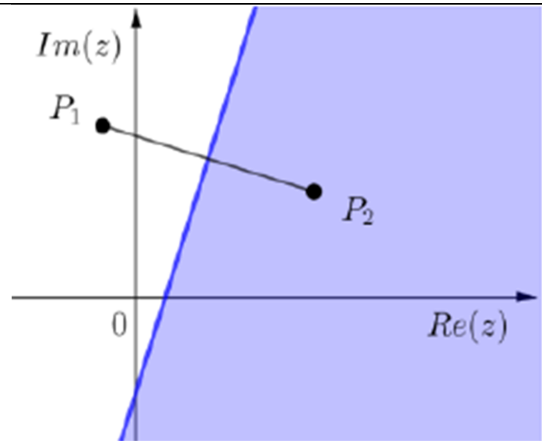


3.

$$1 \leq |z + 3 - 2i| \leq 2$$



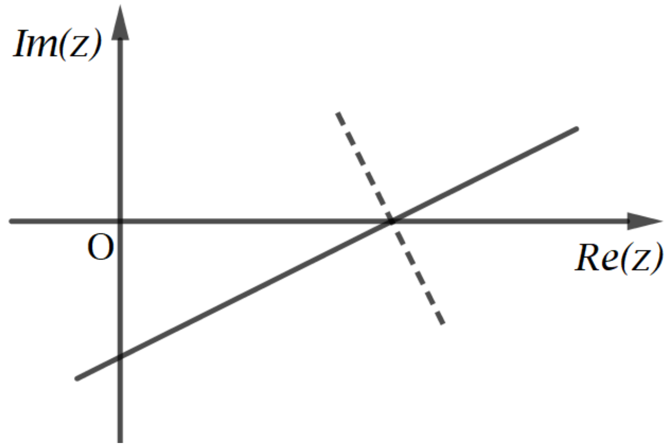
Sejam P_1 e P_2 os afixos dos números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ respetivamente.

$\lvert z - z_1 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$	$\lvert z - z_1 \rvert < \lvert z - z_2 \rvert$	$\lvert z - z_1 \rvert \geq \lvert z - z_2 \rvert$
		
Mediatriz do segmento de reta $[P_1P_2]$	Semiplano aberto, limitado pela mediatriz de $[P_1P_2]$ e que contém o ponto P_1.	Semiplano fechado, limitado pela mediatriz de $[P_1P_2]$ e que contém o ponto P_2.

Represente geometricamente, no plano complexo, a região do plano definida pelas condições seguintes:

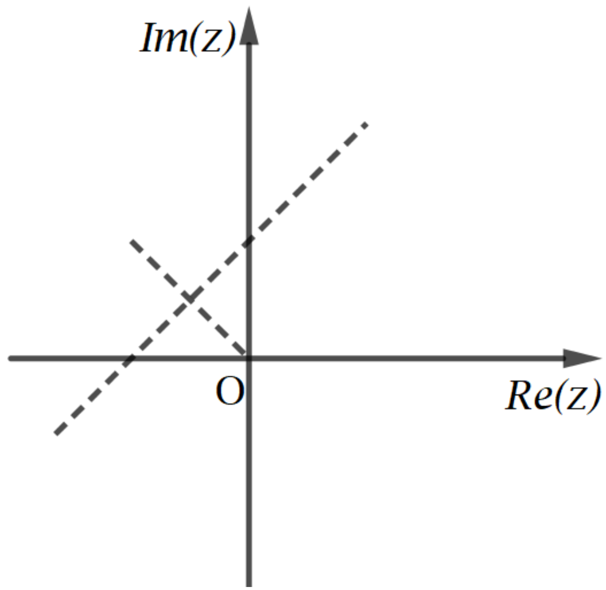
1.

$$\left|z-2-i\right| = \left|z-\left(3-i\right)\right|$$



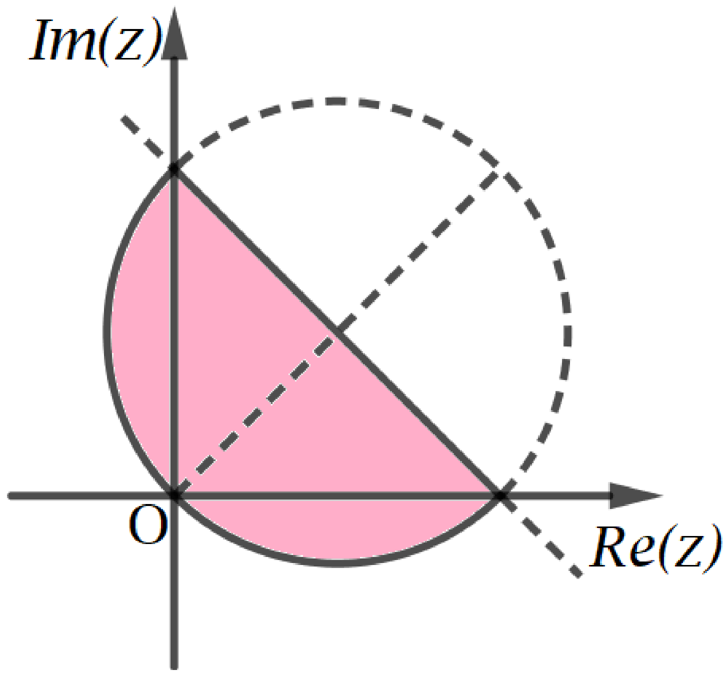
2.

$$\left|z\right| > \left|z+1-i\right|$$



3.

$$\left|z-2-2i\right| \geq \left|z\right| \quad \wedge \quad \left|z-\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right| \leq \sqrt{2}$$



$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i$$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que

$$z_1 = 2 + i \qquad \text{e} \qquad z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$$

Considere a condição $\left|z - z_1\right| = \left|z - z_2\right| \quad (1)$

Mostre que o número complexo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

$$z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{z_1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{4+3i}{\overline{z_1}} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z_2 = 1 + 2i$$

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$$

$$\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right| \quad (1)$$

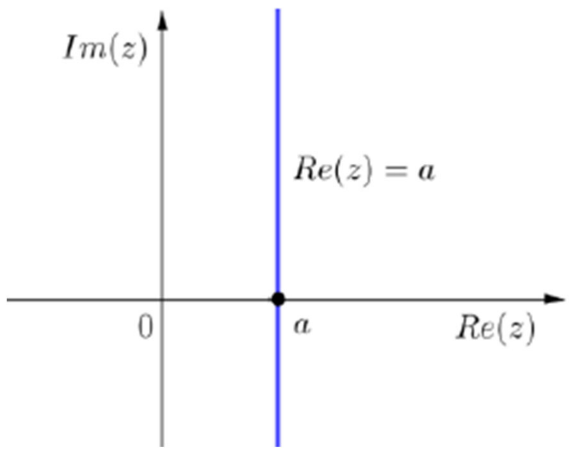
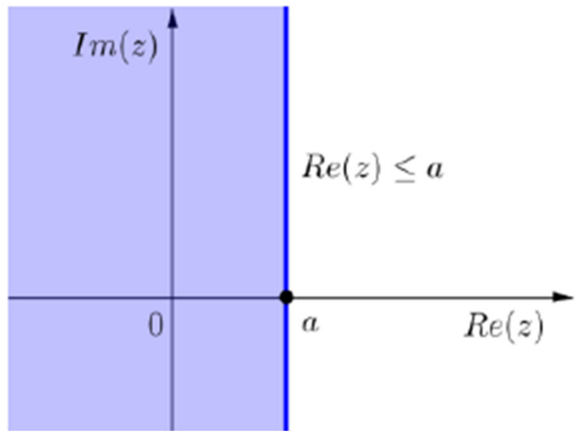
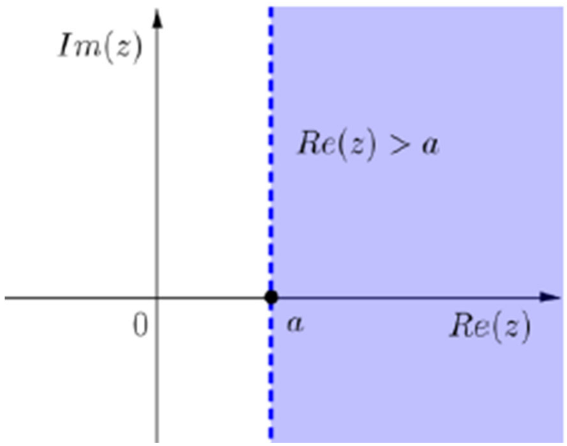
$$z_1=2+i \qquad , \qquad z_2=1+2i \qquad \text{e} \qquad z=1+i$$

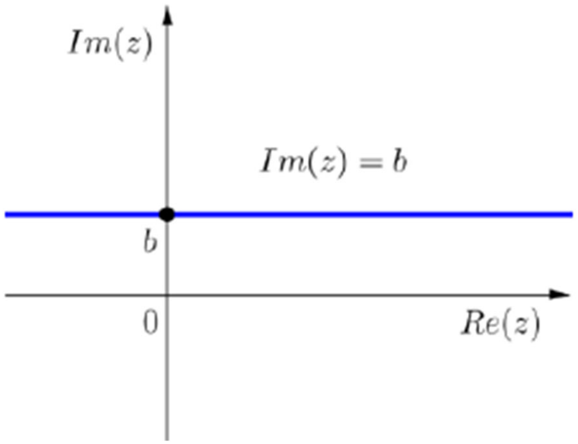
$$\left|z-z_1\right|=\left|1+i-2-i\right|=\left|-1\right|=1 \qquad \text{e} \qquad \left|z-z_2\right|=\left|1+i-1-2i\right|=\left|-i\right|=1$$

Como o número complexo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ verifica a condição (1) então o afixo deste número complexo é equidistante de z_1 e de z_2.

Seja o número complexo $z = a + bi$, tal que $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$

Retas paralelas ao eixos coordenados e semiplanos

$\text{Re}(z) = a$	$\text{Re}(z) \leq a$	$\text{Re}(z) > a$
 Reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(a, 0)$.		

$\operatorname{Im}(z)=b$	$\operatorname{Im}(z)\le b$	$\operatorname{Im}(z)>b$
 Reta horizontal que passa no ponto de coordenadas $(0,b)$.