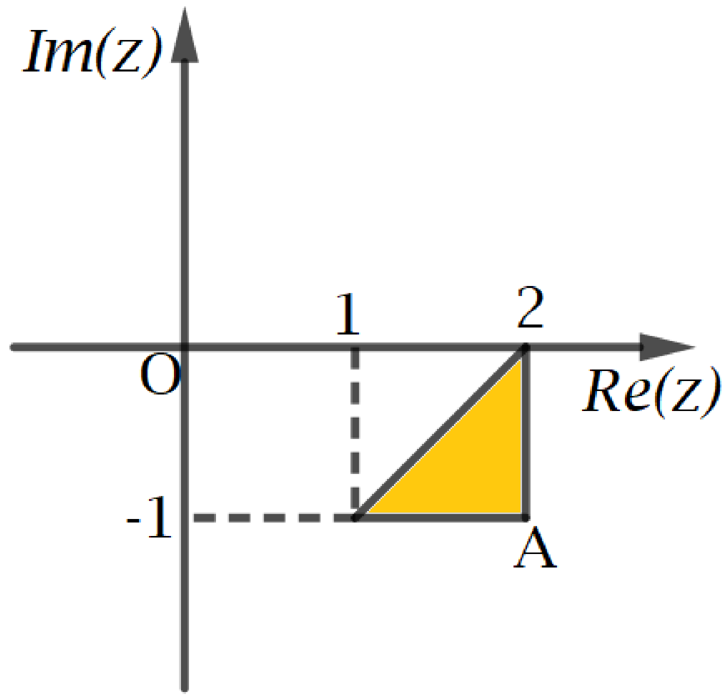
S12 • Domínios planos e condições em variável complexa

Na figura está representada uma região do plano complexo.

O ponto A tem coordenadas $(2,-1)$



Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$

(B) $|z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$

(C) $|z+1| \leq |z-(2+i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$

(D) $|z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq -1$

R: A

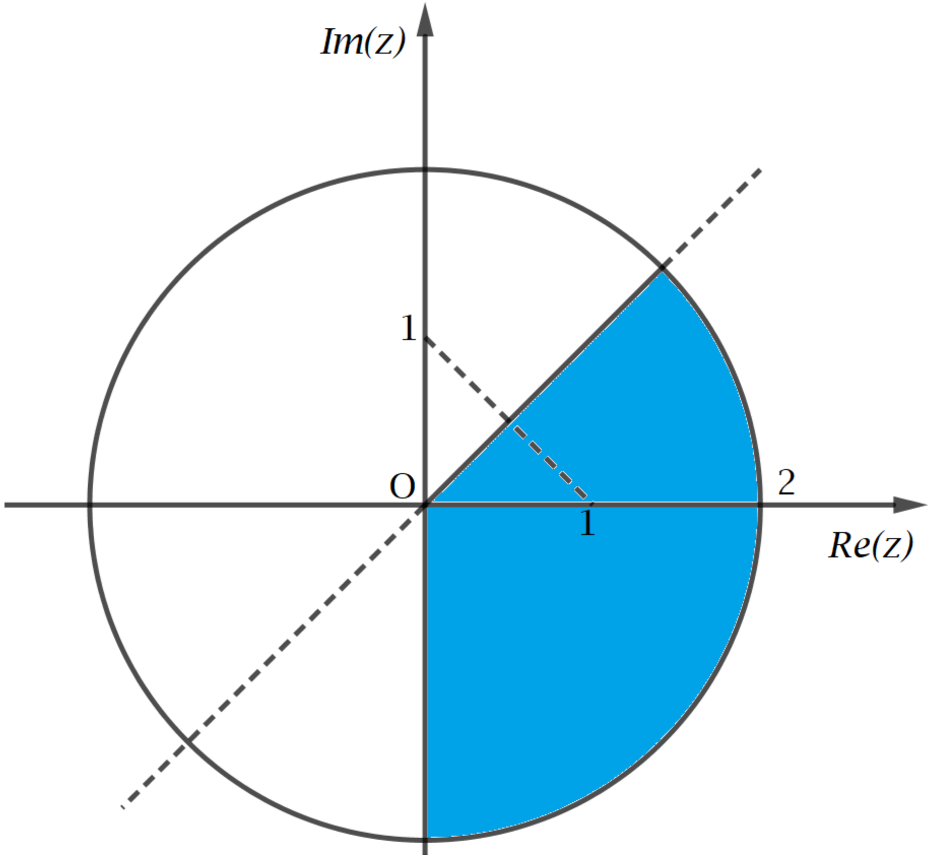
Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Seja B a região do plano complexo definida pela condição

$$|z| \leq 2 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0 \wedge |z-1| \leq |z-i|$$

Represente graficamente B e determine a sua área.

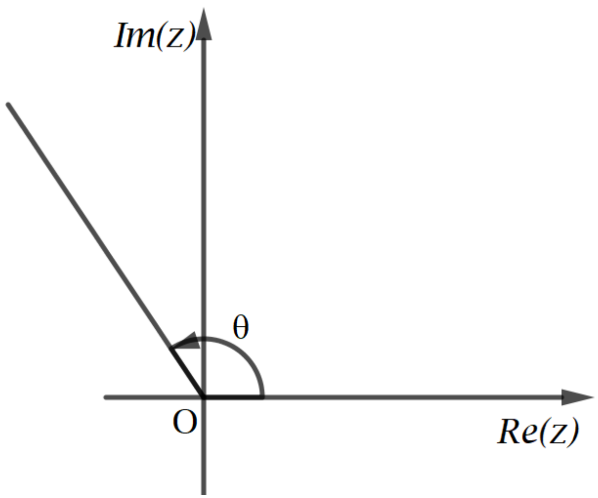
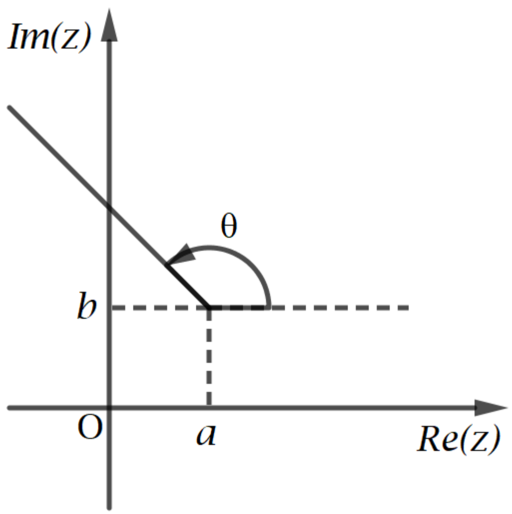
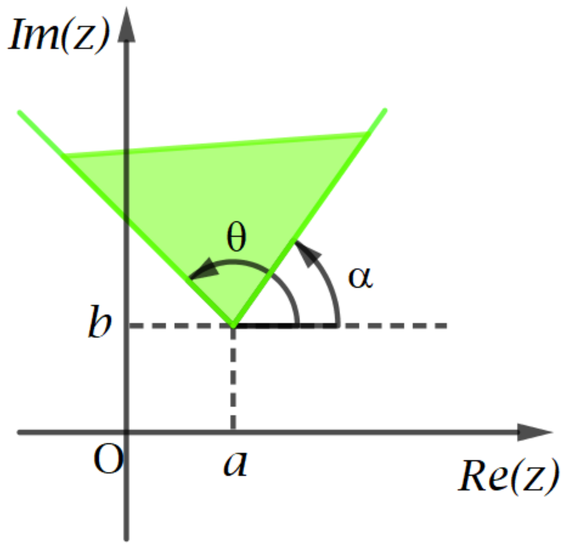
$|z| \leq 2$



$|z-1| \leq |z-i|$

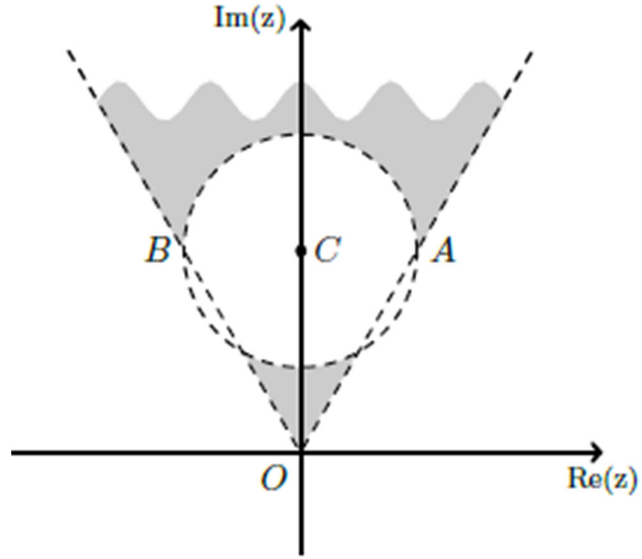
R: $\dfrac{3\pi}{2}$

Sejam $z = re^{i\theta}$ e $z_1 = a + bi$

Semirreta com origem em O e que forma um ângulo de amplitude θ com o semieixo real positivo.	Semirreta com origem no afixo de z_1 e que forma um ângulo de amplitude θ com o semieixo real positivo.	Ângulo com vértice no afixo de z_1 definido por semirretas que formam com o semieixo positivo real ângulos de amplitudes α e θ respetivamente
$Arg(z) = \theta$	$Arg(z - z_1) = \theta$	$\alpha \leq Arg(z - z_1) \leq \theta$
		

Na figura ao lado, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$.

Sabe-se que:



- O é a origem do referencial;
- o ponto A é o afixo do complexo $\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$;
- o ponto B é o afixo do complexo $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$;
- o ponto C é o afixo do complexo $2i$;

Considere como $Arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]-\pi,\pi]$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

(A) $\left|z-2i\right|<\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \wedge\ \frac{\pi}{4}<Arg\left(z\right)<\frac{3\pi}{4}$

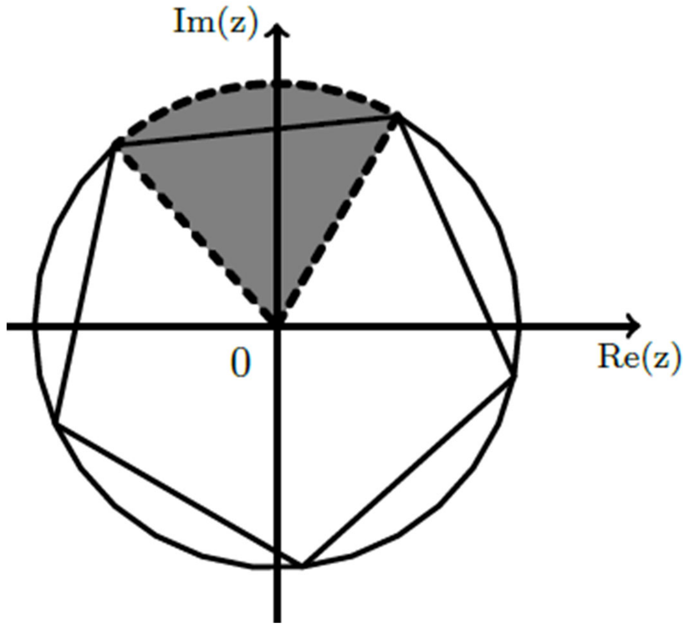
(B) $\left|z-2i\right|<\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \wedge\ \frac{\pi}{3}<Arg\left(z\right)<\frac{2\pi}{3}$

(C) $\left|z-2i\right|>\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \wedge\ \frac{\pi}{3}<Arg\left(z\right)<\frac{2\pi}{3}$

(D) $\left|z-2i\right|>\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \wedge\ \frac{\pi}{4}<Arg\left(z\right)<\frac{3\pi}{4}$

R: C

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$



No plano complexo, o afixo de z_1 é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura. Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, excluindo a fronteira.

Como o pentágono é regular, os arcos de circunferência compreendidos entre dois vértices consecutivos são iguais. Cada um deles tem, portanto, amplitude igual a $\frac{2\pi}{5}$.

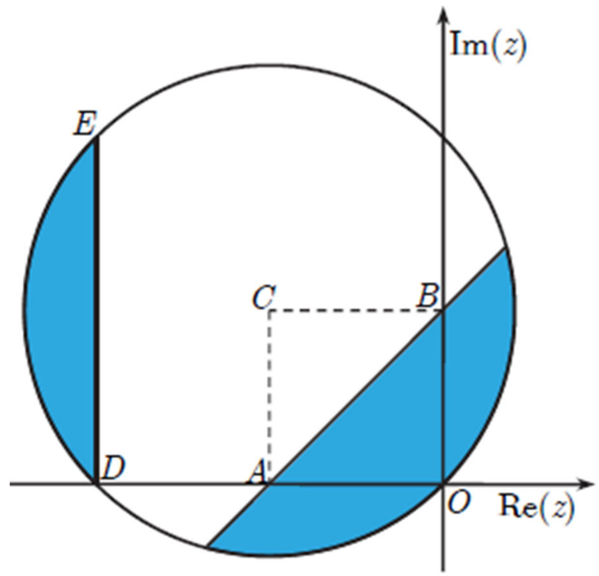
Por outro lado, o afixo de $2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ é o ponto A - único vértice do pentágono que se encontra no primeiro quadrante.

Assim o número complexo cujo afixo é o ponto B é $2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(\frac{11\pi}{15}\right)}$

R: $|z| < 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{3} < Arg(z) < \frac{11\pi}{15}$

Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência de centro C e raio $\overline{OC}$. Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto C é o afixo do complexo $-2+2i$;
- os pontos A, B, D e E são afixos dos complexos -2; $2i$, -4 e $-4+4i$, respetivamente.



Defina a região sombreada incluindo a fronteira.

$$|z+2-2i| \leq 2\sqrt{2} \;\wedge\; \left[\frac{\pi}{2} \leq Arg(z+4) \leq \pi \;\vee\; |z| \leq |z+2-2i|\right]$$

$$|z+2-2i| \leq 2\sqrt{2} \;\wedge\; \left[\frac{-3\pi}{4} \leq Arg(z+2) \leq \frac{\pi}{4} \;\vee\; \mathrm{Re}(z) \leq -4\right]$$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_2 = -1 + i$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 + z_2 \times \overline{z} = 0$.

$$z^2 + z_2 \times \overline{z} = 0$$

Seja $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^2 = \rho^2 e^{i(2\theta)}$$

$$\overline{z} = \rho e^{i(-\theta)}$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$z_2 \times \overline{z} = \sqrt{2} \rho e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$z^2 = -z_2 \times \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 e^{i(2\theta)} = \sqrt{2} \rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho^2 - \sqrt{2}\rho = 0 \quad \wedge \quad 2\theta = -\frac{\pi}{4} - \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho\left(\rho - \sqrt{2}\right) = 0 \quad \wedge \quad 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\quad \rho = 0 \quad \vee \quad \rho = \sqrt{2} \right) \quad \wedge \quad \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $\rho = 0$ temos a solução $z = 0$

Fazendo $k = 0$, obtemos $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

Fazendo $k = 1$, obtemos $z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

Fazendo $k = 2$, obtemos $z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{15\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

$$S = \left\{0,\ \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)},\ \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)},\ \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right\}$$

Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, de modo que o afixo do número complexo $\left(2e^{i\theta}\right)^2 \times \left(1+\sqrt{3}i\right)$ pertença à bissetriz do terceiro quadrante.

$$\left(2e^{i\theta}\right)^2 \times \left(1+\sqrt{3}i\right) = 4e^{i(2\theta)} \times 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Este número complexo pertence à bissetriz do terceiro quadrante sse

$$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \ \ \Leftrightarrow \ \ \theta = \frac{11\pi}{24} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, tem-se $\theta = \frac{11\pi}{24}$, valor que pertence ao intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

R: $\theta = \frac{11\pi}{24}$

Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{3\pi}{10}$ (B) $-\frac{4\pi}{5}$ (C) $-\frac{7\pi}{5}$ (D) $-\frac{13\pi}{10}$

2017 - 2ª fase

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z?

(A) $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{36}\right)}$ (B) $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{36}\right)}$ (C) $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{36}\right)}$ (D) $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{36}\right)}$

2011 - Época Especial

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \sqrt{2} + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \qquad \text{e} \qquad z_2 = 1 + i$$

Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raíz quarta de um certo número complexo w.

Determine w na forma algébrica, **sem utilizar a calculadora**.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z=\frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i}+3i^{15}$

Escreva o complexo $-\frac{1}{2}\times\overline{z}$ na forma trigonométrica.