S6 • Números complexos

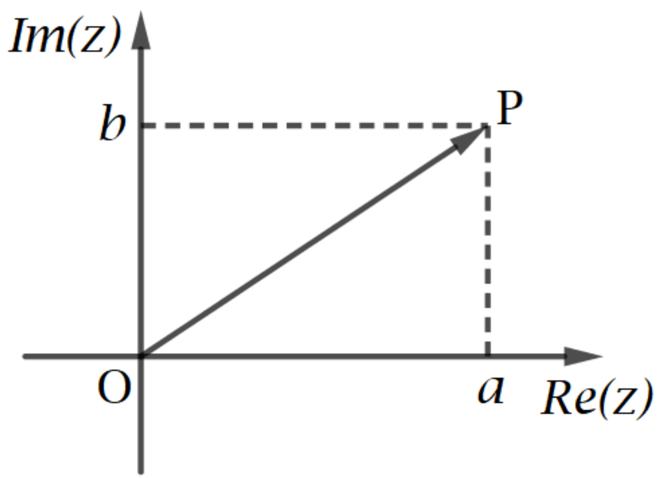
Simétrico de um número complexo z

Seja $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$

Dois números complexos dizem-se **simétricos** quando têm partes reais e partes imaginárias simétricas. O simétrico de z representa-se por $-z$ e $-z = -a - bi$

Para qualquer número complexo z tem-se que $-(-z) = z$

O afixo do do número complexo $-z$ é a imagem geométrica do afixo do número complexo z pela reflexão central de centro O, sendo O a origem dos eixos coordenados do plano complexo.



Propriedade:

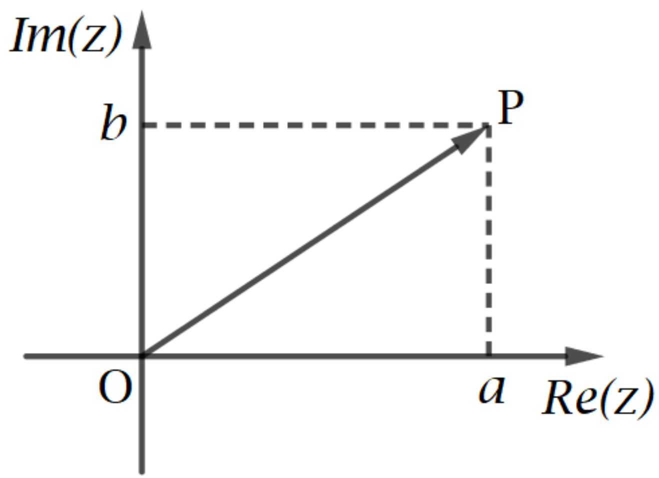
$$|z| = |-z|$$

Conjugado de um número complexo z

Seja $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$

Dois números complexos dizem-se **conjugados** quando têm partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O conjugado de z representa-se por $\bar{z}$ e $\bar{z} = a - bi$

O afixo do número complexo $\bar{z}$ é a imagem do afixo do número complexo z pela reflexão eixo real.



Propriedade

$$|z| = |\bar{z}|$$

Propriedades dos números complexos

1. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

2. $\overline{z\times w}=\overline{z}\times\overline{w}$

3. $\overline{\overline{z}}=z$

4. $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\mathrm{Re}\left(z\right)$

5. $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\mathrm{Im}(z)$

6. z é um número real se e só se $z=\overline{z}$

7. $z\neq 0$ é um número imaginário puro se e só se $z=-\overline{z}$

8. $z\times\overline{z}=|z|^2$

9. $|z\times w|=|z|\times|w|$

10. $|z+w|\leq|z|+|w|$

Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo z, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no primeiro quadrante.

Sejam os pontos B e C, respetivamente, as imagens geométricas de $\overline{z}$ e de $-z$.

Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $\left|z\right| = 5$

Determine a área do triângulo $\left[ABC\right]$.

R: A área do triângulo $\left[ABC\right]$ é igual a 24.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número 1

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo.

Determine, sem recorrer à calculadora, o perímetro desse triângulo.

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$$

R: O perímetro do triângulo é igual a $4 + 2\sqrt{5}$.

S6 • Números complexos

Divisão de números complexos

Regra prática para dividir dois números complexos

Para dividir dois números complexos, multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \times \overline{z}}{z \times \overline{z}} = \frac{w \times \overline{z}}{|z|^2}, \; z \neq 0$$

Exemplo:

$$\frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)\times(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+7i}{1^2+2^2} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a uindade imaginária.

Determine $\dfrac{(2+i)^2+1+6i^{35}}{1+2i}$ sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma algébrica.

R: $-2i$

Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:

1. $\left(1+3i\right)^{-1}$

$$z \times z' = 1 \Leftrightarrow z' = \frac{1}{z}, z \neq 0$$

2. $\left(1-3i\right)^{-2}$

3. $\dfrac{1}{3+2i^{-23}} = \dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13}i$

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a uindade imaginária.

Prove que $w = \dfrac{(4-3i)^2}{i} - \left(2\sqrt{6}i\right)^2$ é imaginário puro.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a uindade imaginária.

Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{-1 - i}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

Para que w seja um número real, temos que $\dfrac{3-b}{2} = 0 \Leftrightarrow b = 3$