S5 • Números complexos

1. Resolva as equações:

1.1. $x^2 + 2x = 0$

1.2. $x^2 + 1 = 0$

1.3. $x^2 - 2x + 2 = 0$

1.4. $x^2 + 4x + 13 = 0$

Conjunto dos números complexos: $\mathbb{C}=\left\{a+bi : a,b\in\mathbb{R} \text{ e } i=\sqrt{-1}\right\}$

$\sqrt{-1}$, que não tinha significado em $\mathbb{R}$, passa a tê-lo no novo conjunto numérico e é designado por i (**unidade imaginária**)

(i é, portanto, uma raiz quadrada de -1, isto é, $i^2=-1$)

Exemplos de números complexos:

$$z_1=1+2i \qquad z_2=3i \qquad z_3=2 \qquad z_4=-\frac{1}{2}+4i$$

Dado um número complexo z, existe um único número real a e um único número real b tal que $z = a + bi$

$a + bi$ é a **forma algébrica** do número complexo z

Parte real e parte imaginária de um número complexo

Consideremos o número complexo $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$

- a é a parte real de z e representa-se por $\operatorname{Re}(z)$.
- b é a parte imaginária de z e representa-se por $\operatorname{Im}(z)$

Simbolicamente, se $z = a + bi$, então $\operatorname{Re}(z) = a$ e $\operatorname{Im}(z) = b$

Números reais e números imaginários puros

Seja $z = a + bi \ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ um número complexo

- z é um número real $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$

ou

$z = a + bi$ é um número real $\Leftrightarrow b = 0$

- z é um imaginário puro $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0$

ou

$z = a + bi$ é um imaginário puro $\Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$

2. Seja $z = 3x - 6 + (y - 1)i \ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Determine x e y de modo que z seja um número:

2.1. real;

2.2. imaginário puro.

Operações com números complexos na forma algébrica

Para adicionar, subtrair e multiplicar números complexos, podemos considerá-los como polinómios em i e ter em conta que $i^2 = -1$

Adição subtração e multiplicação de números complexos

Dados $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = -1 + i$, determine:

- $z_1 + z_2$

- $z_1 \times z_2$

- $z_1 + \left(z_2\right)^2$

- $iz_1 + \left(z_2 - z_1\right)^2$

De um modo geral tem-se:

Seja $z_1 = a + bi \ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ e $z_2 = c + di \ \left(c, d \in \mathbb{R}\right)$

$$z_1 \pm z_2 = \left(a + bi\right) \pm \left(c + di\right) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$z_1 \times z_2 = \left(a + bi\right) \times \left(c + di\right) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Igualdade de números complexos na forma algébrica

Sejam z_1 e z_2 os números complexos:

$z_1 = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ e $z_2 = c + di \ (c, d \in \mathbb{R})$

Tem-se: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Exercício: Considere $z = x + 4yi$ e $w = 1 + xi + 2yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$

Determine os números reais x e y de modo que $z = w$.

Potências de base i e expoente pertencente a $\mathbb{N}_0$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i^4 \times i = i$

$i^6 = i^5 \times i = -1$

$i^7 = i^6 \times i = -i$

...

Conclui-se, assim, que as potências de i repetem-se de 4 em 4

$i^{74} = i^{4\times 18+2} = i^2 = -1$ $\qquad 74 \;\underline{|4\quad}$

Se $n = 4q + r$, $r \in \{0,1,2,3\}$, em que r é o resto da divisão inteira de n por 4, então $i^n = i^r$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a expressão

$$i^0 + i^1 + i^2 + \quad . \quad . \quad . \quad + i^{2018}$$

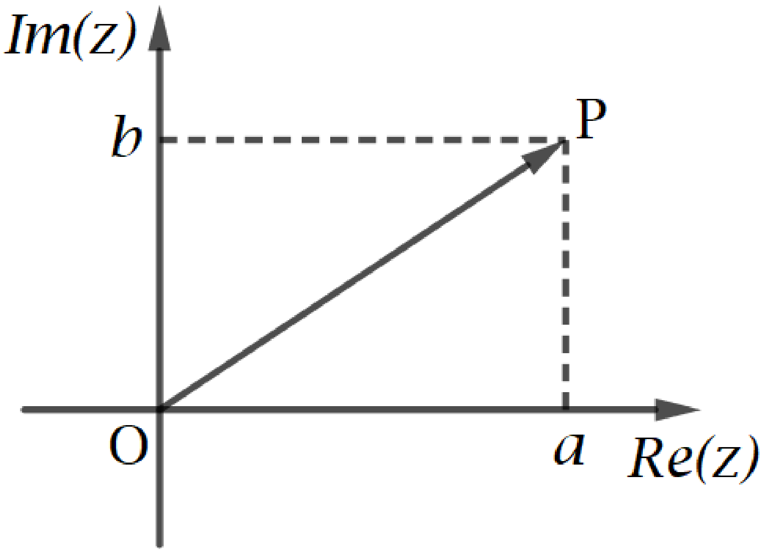
é igual a

(A) i (B) $-i$ (C) $-1+i$ (D) $1+i$

Representação geométrica de números complexos

Seja $z = a + bi \; (a, b \in \mathbb{R})$, um número complexo

Num plano munido de um referencial ortonormado direto, a cada número complexo z corresponde um ponto P de coordenadas (a, b).



O ponto P denomina-se por **afixo** ou **imagem geométrica** do número complexo z.

Ao vetor $\overrightarrow{OP}$ dá-se o nome de **afixo vetorial de z**.

O plano utilizado nestas representações recebe o nome de **Plano Complexo** ou **Plano de Argand**.

O eixo das abcissas denomina-se de **eixo real** e o eixo das ordenadas de **eixo imaginário**.

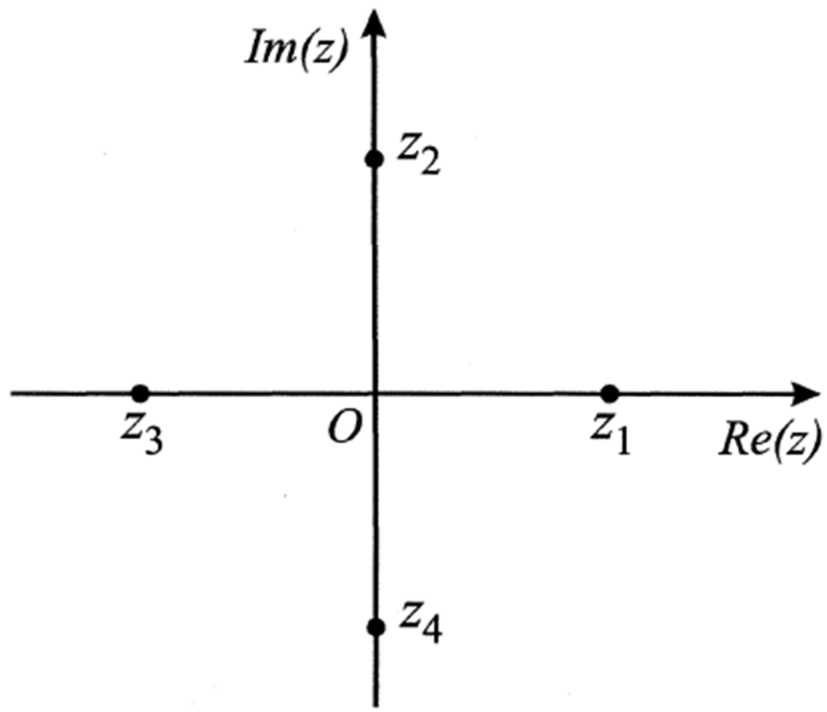
Chama-se módulo de z à distância, no plano complexo, da sua imagem geométrica à origem ou, dito de outro modo, à norma do seu afixo vetorial.

O módulo de z representa-se por $\left|z\right|$ e tem-se que $\left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Calcule o módulo do número complexo $z = \sqrt{2} - \sqrt{7}i$.

Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4.

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?



(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = b + ai$ $\left(a,\ b \in \mathbb{R}\right)$ dois números complexos.

O produto de $z_1 \times z_2$ é um número complexo cujo afixo é um ponto situado

(A) no eixo real

(B) no eixo imaginário

(C) na bissetriz dos quadrantes pares

(D) na bissetriz dos quadrantes ímpares