Limite de uma função real de variável real, segundo Heine

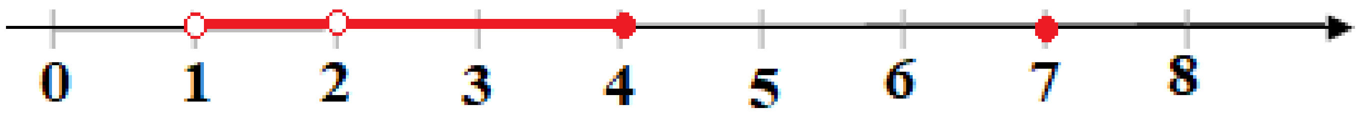
Dado um conjunto A e $a \in \mathrm{IR}$, diz-se que a é **ponto aderente** a A quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim(x_n)=a$.

Ao conjunto dos pontos aderentes a A dá-se o nome de **aderência de A**

Nota:
Todos os elementos que pertencem a A são pontos aderentes a A; no entanto podem existir pontos aderentes a A que não pertencem a A.

Exemplo:

$B =]1,2[\cup]2,4] \cup \{7\}$



Aderência de $B = [1,4] \cup \{7\}$

Limite de uma função, segundo Heine

Sejam f uma função real de variável real e a e b números reais.

Diz-se que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a se

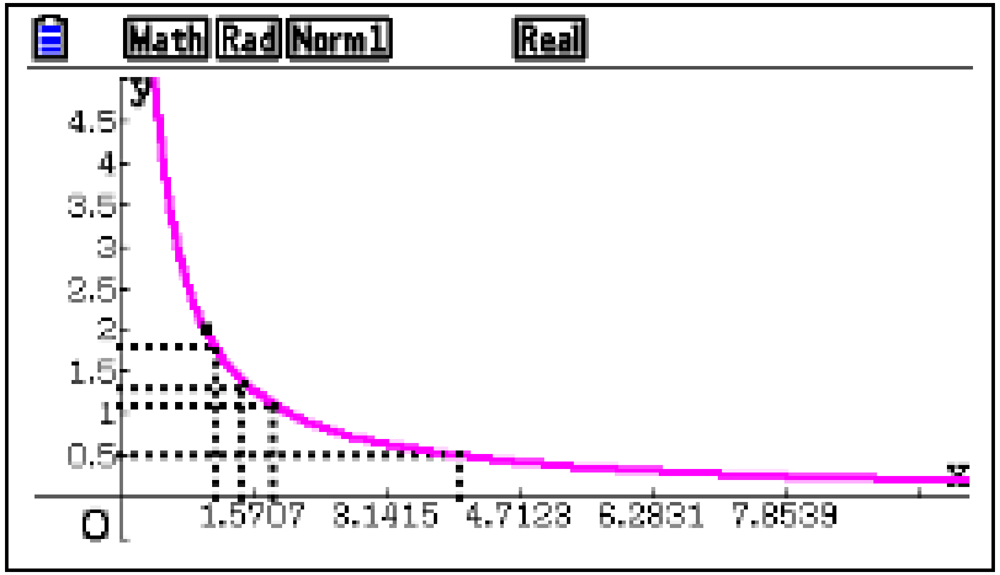
- a é ponto aderente a D_f
- a imagem por f de toda a sucessão (x_n) convergente para a é uma sucessão convergente para b

e representa-se por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Obs.: A definição continua válida nos casos em que b é infinito ($\pm\infty$)

Através da calculadora gráfica

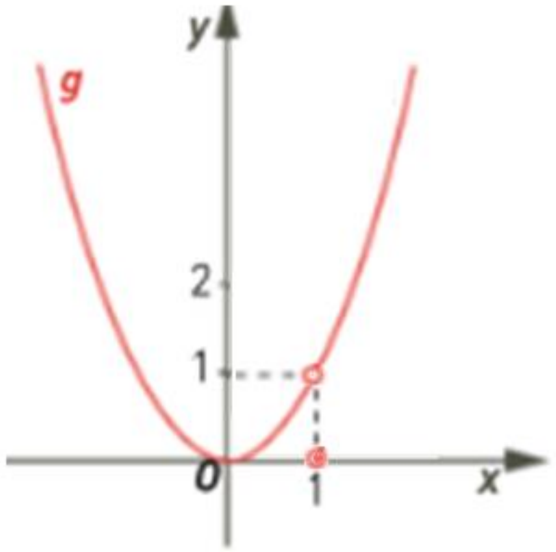
$$f(x)=\frac{2}{x}$$

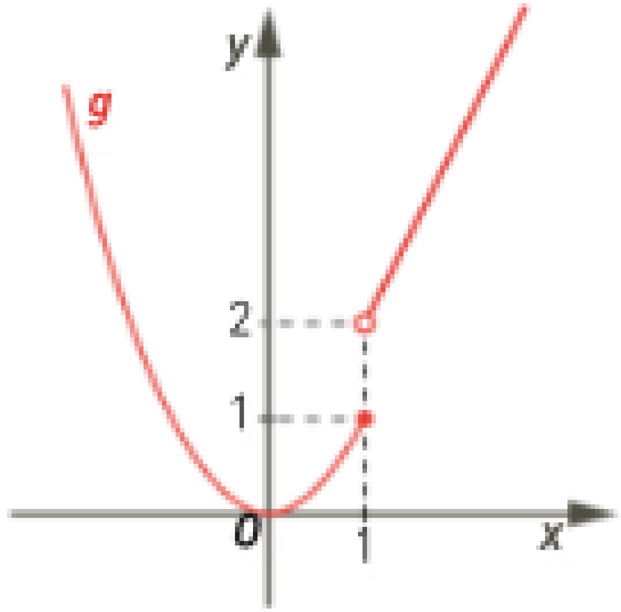


$f(x_n) \longrightarrow 2$

$1 \longleftarrow x_n$

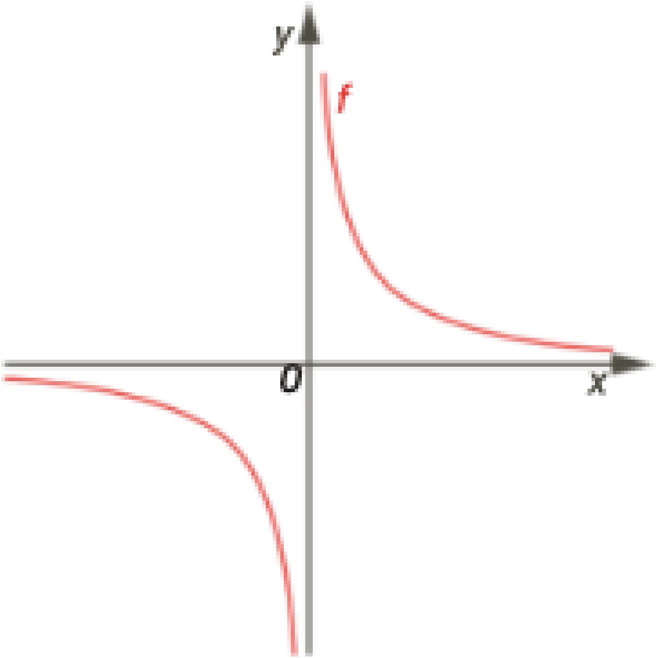
Exemplos :

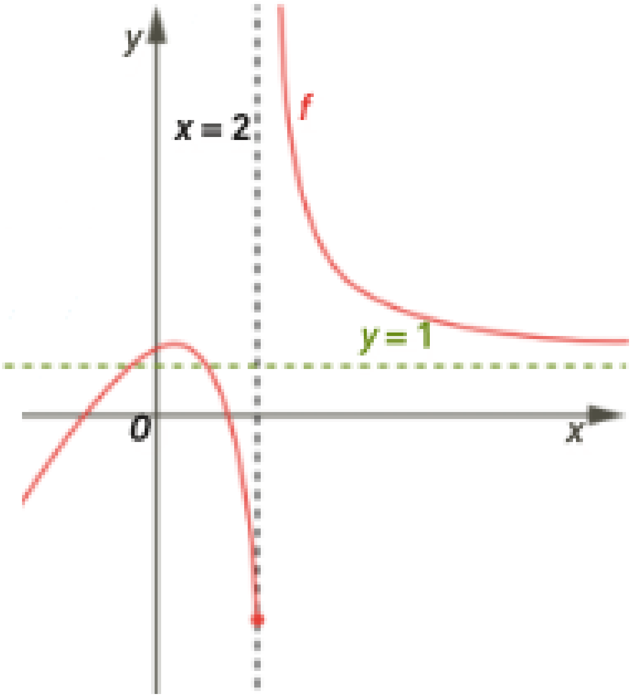




$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=1 \\ g(1)=0 \end{array}\right\}$$ Não existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=1 \end{array}\right\}$$ Não existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$





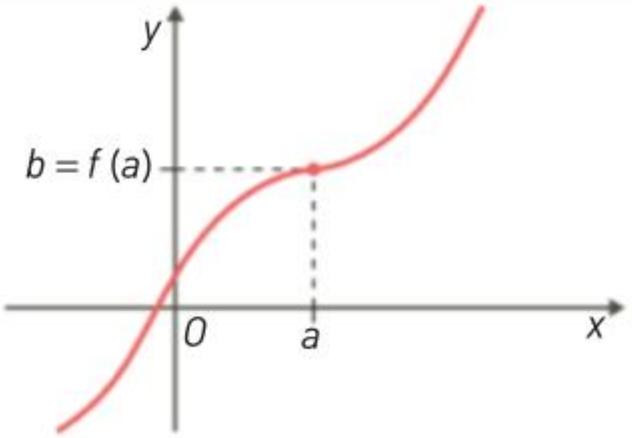
Telensino

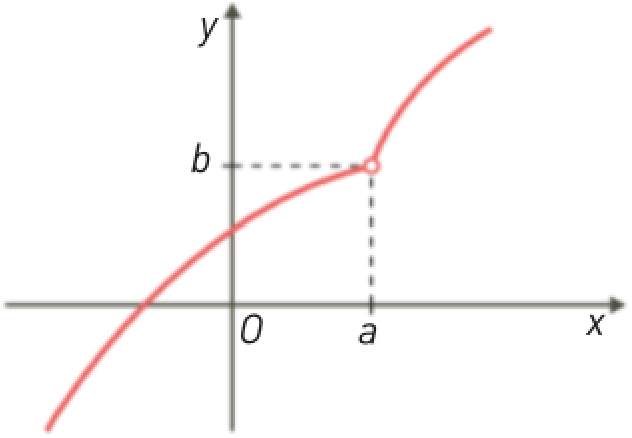
$$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$

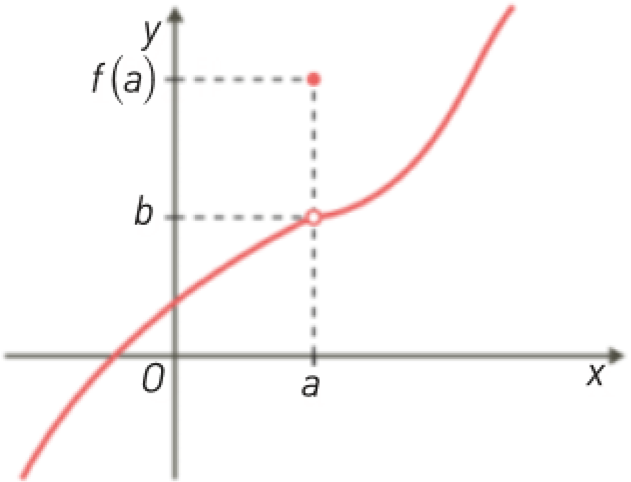
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = k, \quad k < 0 \end{array}\right\}$$ Não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

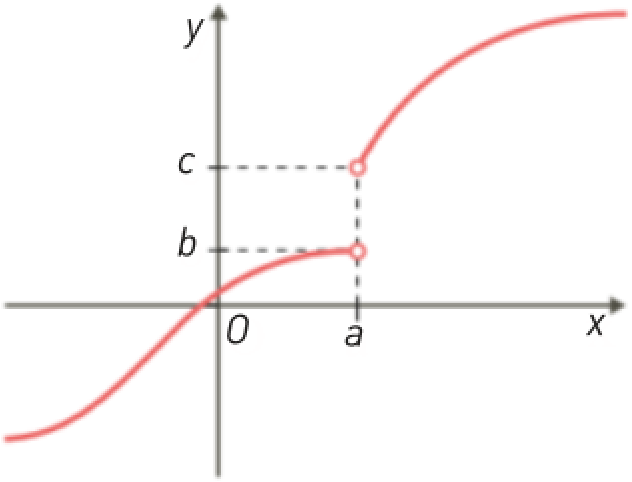
Telensino

<table>
<tr><th></th><th>$a \in D_f$</th><th>$a \notin D_f$</th></tr>
<tr><td>Existe
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$</td><td>

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$</td><td>

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>$a \in D_f$</th><th>$a \notin D_f$</th></tr>
<tr><td>Não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$</td><td>

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b \neq f(a)$</td><td>

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$</td></tr>
</table>

Seja f uma função, real de variável real, e a um ponto aderente ao D_f.

- *Se $a \notin Df$ e existem e são iguais os limites* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

então <u>existe</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

- *Se $a \in Df$ e existem e são iguais a $f(a)$ os limites*

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ então <u>existe</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

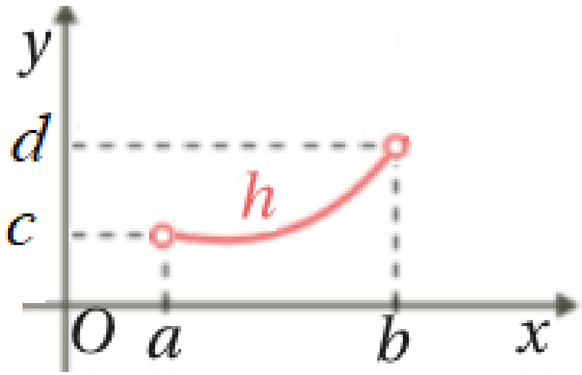
Se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ então <u>não existe</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Decorrente da unicidade do limite de uma sucessão convergente temos que:

O limite de f quando x tende para a, quando existe, é <u>único</u>

Nota: Se o domínio da função for do tipo $]a,b[$, com $a,b \in IR$ então

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$



1- Seja f uma função real de variável real definida, no seu domínio, por

$$f(x)=\frac{3+4x}{x}$$

Recorrendo à definição de limite segundo Heine mostre que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$

Resolução:

- Df=$IR\setminus\{0\}$
- 3 é ponto aderente
- Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $x_n \in Df,\ \forall n \in IN$ e tal que $\lim x_n = 3$

$$\lim f(x_n)=\lim\frac{3+4x_n}{x_n}=\frac{3+4(\lim x_n)}{\lim x_n}=\frac{3+4\times 3}{3}=5$$

Logo $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$

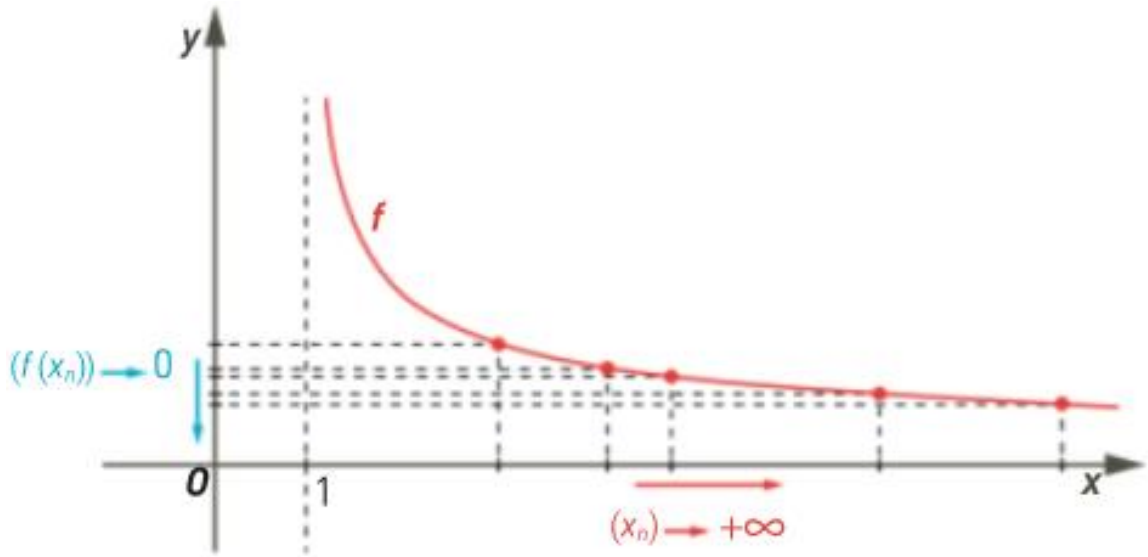
Limites infinitos

Se o domínio de uma função real de variável real f não é majorado e/ou minorado podemos utilizar a definição de limite segundo Heine para determinar $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e/ou $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ caso existam.

(Se existir , o limite é único)

Exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$



Operações com limites

Das propriedades operatórias sobre limites de sucessões deduzem-se propriedades análogas para os limites de funções:

Sejam f e g funções reais de variável real e b_1 e b_2 números reais tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = b_2$$

e a ponto aderente ao conjunto $D_f \cap D_g$. $k \in IR$, $r \in Q$

$\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b_1 \pm b_2$
$\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x) = b_1 \times b_2$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$, com $b_2 \neq 0$
$\lim\limits_{x \to a} (k \times f)(x) = k \times \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \times b_1$
$\lim\limits_{x \to a} (f^r)(x) = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^r = b_1{}^r$, com $b_1 \neq 0$ se $r < 0$

1. Determine:

1.1 $$\lim_{x\to -1}\frac{4x^3-3x}{-x^4+3}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(4x^3-3x)}{\lim\limits_{x\to -1}(-x^4+3)}=\frac{-4+3}{-1+3}=-\frac{1}{2}$$

1.2 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+1)\right)^2}=\frac{0+1}{(0+1)^2}=1$$

1.3 $$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{9-x^2}=\frac{1}{9-(-\infty)^2}=\frac{1}{-\infty}=0$$

2. Verifique se existe $\lim_{x \to 3} \frac{1}{9 - x^2}$

Determinação dos limites laterais:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{9 - x^2} = \frac{1}{9 - 9^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{9 - x^2} = \frac{1}{9 - 9^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{9 - x^2} \neq \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{9 - x^2}$ então não existe $\lim_{x \to 3} \frac{1}{9 - x^2}$

3. Seja h a funções real de variável real definida em]-∞,-1[∪]1,+∞[por

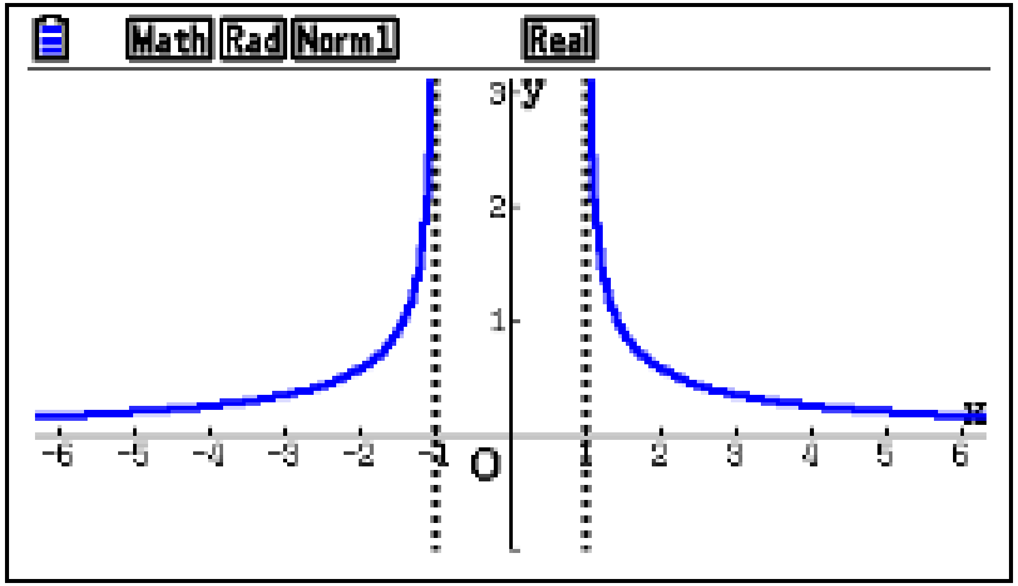
$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Indique:

3.1 $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$

3.2 $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = +\infty$

3.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = 0$



Levantamento algébrico de indeterminações

Tipos de indeterminações: $\infty - \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0 \times \infty$

Se f e g são funções polinomiais de grau n e m, respetivamente, definidas por:

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, com $a_0 \neq 0$ e $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$, com $b_0 \neq 0$

tem-se:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_0 x^n$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$

Aplicações:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2) \underset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3(1-\frac{3}{x})\right] = +\infty\times(1-0) = +\infty$

ou

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^4-5x+3}{3x^5+2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^4}{3x^5} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{3x} = \frac{7}{-\infty} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{2x^2-2x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2)}{2x(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2-2)}{2x} = -\frac{1}{2}$

C.A.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Para a decomposição utilizar:

- Fatores em evidência
- Fórmula resolvente
- Regra de Ruffini

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- Exercícios envolvendo a definição de limite segundo Heine
- Interpretação gráfica da noção de limite
- Levantamento de indeterminações de limites envolvendo funções polinomiais e funções racionais