Derivada

Derivada e cinemática

1. Seja g a função definida por $g(x)=\frac{1}{x}$.

Mostre que as retas, r e s , tangentes ao gráfico da função g nos pontos de abcissas 2 e -2, respetivamente, são paralelas.

Adaptado M∀T 11
Texto

C.A.

$g(2)=\frac{1}{2}$ $\quad g(-2)=-\frac{1}{2}$

$$m_r = g'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)} == \lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \boxed{m_r = -\frac{1}{4}}$$

$$m_s = g'(-2) = \lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{2+x}{2x(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \boxed{m_s = -\frac{1}{4}}$$

Como os declives de r e s são iguais então as retas são paralelas.

2. Considere a função f, de domínio [-2, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2} & \text{se} \quad -2\leq x\leq 2\\ x^2-6x+10 & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

Determine, caso exista, uma equação da reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

C.A.

$f(2)=2$

e - semirreta tangente ao gráfico de f, à esquerda no ponto 2

d - semirreta tangente ao gráfico de f, à direita no ponto 2

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad m_e=\frac{1}{4}$$

$$(2,2)\in e\Rightarrow b=\frac{3}{2} \qquad e: y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$$

$$f\,'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 6x + 10 - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2}$$

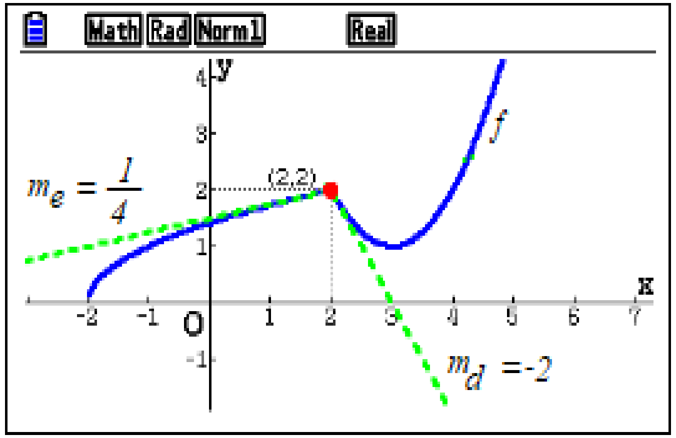
$$= \lim_{x\to 2^+} (x-4) = -2 \qquad \Rightarrow \quad m_d = -2$$

C.A.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$$

$$(2,2) \in d \Rightarrow b = 6 \qquad d : y = -2x + 6$$



Podemos falar de semitangentes:

- Equação da semitangente à esquerda

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

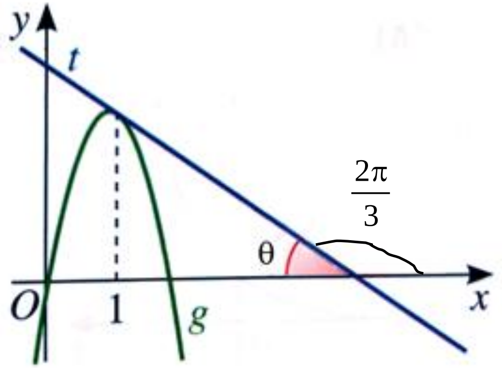
- Equação da semitangente à direita

$$y = -2x + 6$$

R: Como as derivadas laterais são distintas então não existe $f\,'(2)$, pelo que não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

3. Na figura estão representadas, em referencial o.n. parte do gráfico da função g e a reta t tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1. Sabe-se que o ângulo θ tem amplitude $\frac{\pi}{3}$.

Indique o valor de $g'(1)$.



Adaptado Dimensões 11 Santilhana

(A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) -1 (D) $\frac{1}{3}$

Como $\theta = \frac{\pi}{3}$ então a inclinação da reta t é $\frac{2\pi}{3}$

Dado que $g'(1) = m_t$ e $m_t = tg(\frac{2\pi}{3})$ sendo $tg(\frac{2\pi}{3}) = -tg(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

então a opção correta é A

Opção (A)

4. Na figura seguinte encontra-se representada graficamente a função *g* .

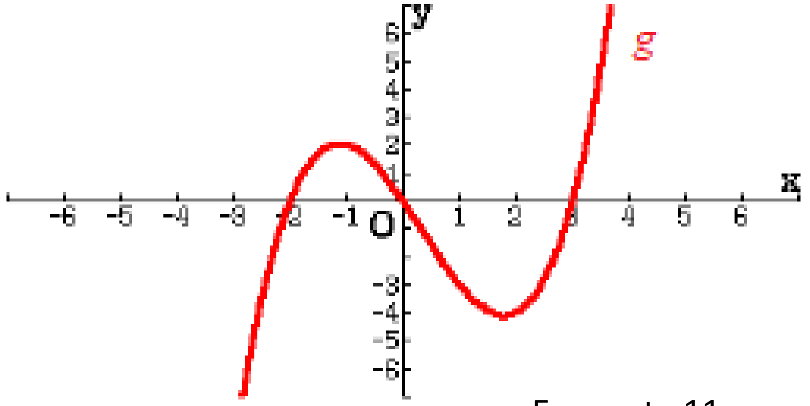
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $g'(-2) \times g'(1) = 0$

(B) $\dfrac{g'(-2)}{g'(3)} > 0$

(C) $\dfrac{g'(1)}{g'(-2)} > 0$

(D) $g'(-3) \times g'(2) < 0$



Expoente 11
ASA

Por observação do gráfico conclui - se que

$g'(-2) > 0$ (o declive da reta tangente ao gráfico de g, em $x = -2$, é positivo)

$g'(1) < 0$

$g'(-3) > 0$

$g'(3) > 0$

$g'(2) > 0$

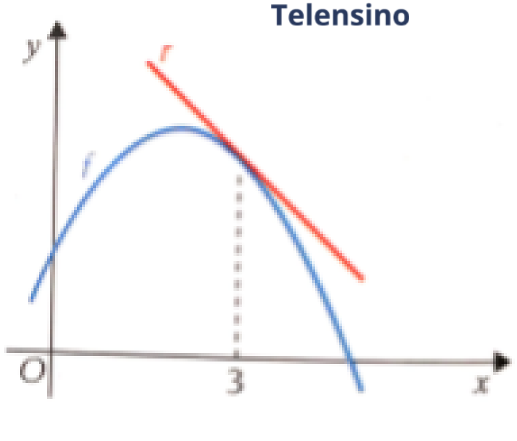
Opção (B)

5. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função f diferenciável em 3;
- uma reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3;

O valor de $f\,'(3)$, derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a:

(A) -1 (B) 0 (C) $\dfrac{1}{f(3)}$ (D) 1



Adaptado de Banco Itens, GAVE

$$f\,'(3) = m_r \quad \text{e} \quad m_r < 0$$

logo a derivada em $x = 3$ terá de ser negativa.

A única opção onde isso acontece é em (A).

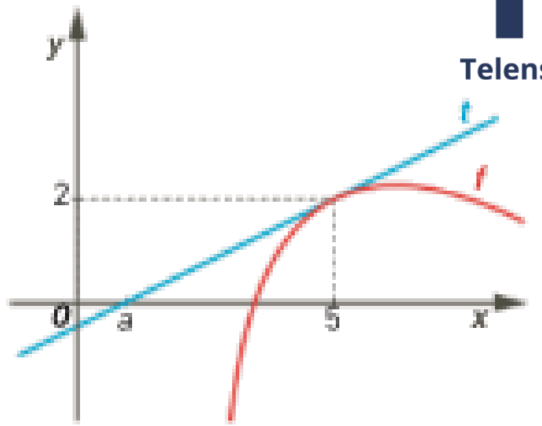
Note-se que, por observação de gráfico, concluímos que $f(3) > 0$

Opção (A)

6. A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A (5,2).

Se $f\,'(5)=\frac{1}{2}$ então:

(A) $a=\frac{4}{5}$ (B) $a=\frac{6}{5}$ (C) $a=1$ (D) $a=\frac{8}{9}$



Novo Espaço 11
Porto Editora

$$f\,'(5)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m_t=\frac{1}{2}$$

então $t: y=\frac{1}{2}x+b$

$$A\in t\Leftrightarrow 2=\frac{5}{2}+b\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$$

Portanto $t: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

a é a abcissa do ponto de interseção da reta t com o eixo Ox, então $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=1$

Opção (C)

7. A reta de equação $y=-\frac{1}{2}x+1$ é perpendicular à reta r, tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa π.

O valor de $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$ é:

(A) 3 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

Novo Espaço 11
Porto Editora

Se a reta dada é perpendicular à reta r então $m_r = 2$

Como $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = f´(\pi)$ e $f´(\pi)=m_r$

então $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = 2$

Opção (B)

8. Seja g uma função real de variável real. Sabe-se que a reta de equação $y=-3x+2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -2.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-2+h)-2}{h}=-3$

(B) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)-8}{x-2}=-3$

(C) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)+2}{x+2}=-3$

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-2+h)-8}{h}=-3$

Expoente 11
ASA

Se a reta de equação $y=-3x+2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -2

Então $g'(-2)=-3$.

Dado que $g(-2)=y(-2)=8$ e utilizando a definição de derivada no ponto, concluímos que

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-2+h)-8}{h}=-3$ ou $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)-8}{x+2}=-3$.

Então a opção correta é (D)

9. Seja f uma função real de variável real tal que:

$$f(2)=3 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=5$$

9.1 Indique, caso exista, o valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Expoente 11
ASA

9.2 Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

9.3 Calcule $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{-x^2+5x-6}$.

9.1. Como $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=5$ então $f'(2)=5$, logo existe a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 . Sendo que f (2)=3 então $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

9.2 Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Pela alínea anterior temos que $f'(2)=5$, isto é , $m_t=5$ então $t: y=5x+b$.

Como o ponto de coordenadas (2,3) pertence a t, temos que:

$$3=5\times 2+b \Leftrightarrow b=-7$$

Logo $t: y=5x-7$

9.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{-x^2+5x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{-(x-2)(x-3)}=$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-3}=-f'(2)\times\frac{1}{2-3}=$$

$$=-5\times(-1)=5$$

C.A.

$-x^2+5x-6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{-2}\Leftrightarrow x=2\vee x=3$

Telensino

A derivada e a cinemática

Para estudar a **posição**, a **velocidade média** e a **velocidade instantânea** de um ponto P que se desloca numa reta r, temos de:

- fixar, na reta r, uma origem, uma unidade de comprimento, L, e um sentido;
- fixar um intervalo de tempo, I, e uma unidade de tempo, T;
- considerar a função posição $p: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto p(t)$, sendo $p(t)$ a abcissa do ponto P no instante t.

A **velocidade média** do ponto P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, com $t_1, t_2 \in I$, é dada, na unidade L/T, por $\dfrac{p(t_2)-p(t_1)}{t_2-t_1}$.

A **velocidade instantânea** do ponto P no instante t e na unidade L/T é igual a $p'(t)$, caso exista.

1. Um ponto P move-se numa reta de tal forma que, em cada instante t (em segundos), a distância d (em cm) à origem O é dada pela expressão $d(t) = t^2 - 19t + 60$.

Telensino

1.1 No instante inicial, qual a distância do ponto P à origem?

1.2 Determine a velocidade média do ponto P nos três primeiros segundos.

1.3 Determine a velocidade no instante $t = 4$ e indique a distância à origem nesse instante.

1.4 Determine a expressão da velocidade em cada instante t e indique em que instante a velocidade é nula.

Caderno Apoio às Metas

C.A.

$$d(3) = 3^2 - 19 \times 3 + 60 = 12$$

1.1 $d(0) = 0^2 - 19 \times 0 + 60 = 60$

A distância do ponto P à origem no instante inicial é 60 cm.

1.2 $\vec{v} = t.m.v._{[0,3]} = \dfrac{d(3) - d(0)}{3 - 0} = \dfrac{12 - 60}{3} = -16$

A velocidade média do ponto P nos três primeiros segundos é *-16* cm/s

1.3 Determine a velocidade no instante $t=4$ e indique a distância à origem nesse instante.

velocidade instantânea em $t=4$ $= d'(4) = \lim_{t\to 4} \frac{d(t)-d(4)}{t-4} =$

C.A.

$$d(4)=4^2-19\times 4+60=0$$

$$\lim_{t\to 4} \frac{t^2-19t+60-0}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{(t-4)(t-15)}{t-4} = \lim_{t\to 4}(t-15) = -11$$

A velocidade no instante $t=4$ é -11 cm/s e a distância à origem é 0 cm.

$$d(t) = t^2 - 19t + 60$$

1.4 Determine a expressão da velocidade em cada instante t e indique em que instante a velocidade é nula.

$$d'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - 19t + 60 - (t_0^2 - 19t_0 + 60)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - 19t - t_0^2 + 19t_0}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - t_0^2 + 19(t - t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0) - 19(t - t_0)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)\left[(t + t_0) - 19\right]}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} (t + t_0 - 19) = 2t_0 - 19$$

Logo $\boxed{d'(t) = 2t - 19}$; $d'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 19 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19}{2}$

A velocidade é nula ao fim de 9,5 s.

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- Determinação da derivada num ponto
- Interpretação da derivada na resolução de exercício de escolha múltipla
- Exercícios de cálculo de velocidade média e velocidade instantânea