S10 • Números complexos

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \;\; e \;\; n \in \mathbb{N}\right)$$

Resumo:

- As raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ são extamente n.
- As raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ têm todas o mesmo módulo.
- Os afixos das raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ dispõem-se ao longo de uma circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt[n]{\rho}$ e dividem-na em n partes iguais.
- Os argumentos das n raízes correspondentes a valores de k consecutivos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.
- Os afixos das n raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$.

Exemplo:

- $\sqrt[4]{16} =$

- $\sqrt{-4} =$

Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z=\frac{2i}{1-i}+2i^{23}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos w tais que $w^3=\overline{z}$. Apresente os valores pedidos na forma trigonométrica.

$$z=\frac{2i}{1-i}+2i^{23}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}-2i=\frac{2i(1+i)}{2}-2i=-1-i$$

$$\overline{z}=-1+i$$

$$w^3 = \overline{z} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\overline{z}} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow w = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0,1,2\}$$

$$\Leftrightarrow w = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)},\ k \in \{0,1,2\}$$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de ordem 6 de um número complexo w.

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são os afixos das raízes de índice 6 desse número complexo w.

Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 (B) 36 (C) 30 (D) 24

R: C

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

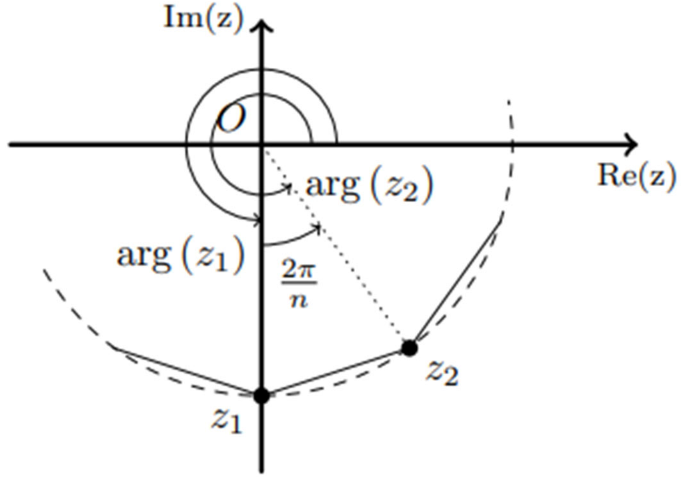
$$z_1 = (1+i)^6 \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{8i}{e^{i\left(-\frac{6}{5}\pi\right)}}$$

Sabe-se que os afixos dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n.

$$z_1 = (1+i)^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad z_2 = \frac{8i}{e^{i\left(-\frac{6}{5}\pi\right)}} = \frac{8e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(-\frac{6}{5}\pi\right)}} = 8e^{i\left(\frac{17}{10}\pi\right)}$$

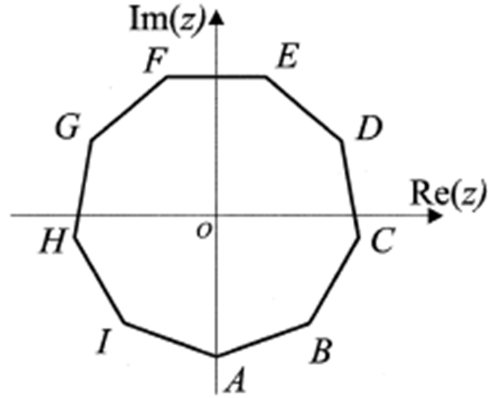
Como os afixos dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.



Então

$$Arg(z_2) - Arg(z_1) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{17\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 10$$

Na figura, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$.



Os vértices desse polígono são os afixos das raízes de ordem n de um número complexo z.

O vértice A tem coordenadas $(0,-3)$.

Qual dos números complexos seguintes tem por afixo o vértice F?

(A) $3e^{i\left(\frac{7\pi}{18}\right)}$ (B) $3e^{i\left(\frac{11\pi}{18}\right)}$ (C) $3e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ (D) $3e^{i\left(\frac{5\pi}{9}\right)}$

R: B

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$

Sabe-se que z_1 é uma das raízes de ordem 3 de um número complexo z.

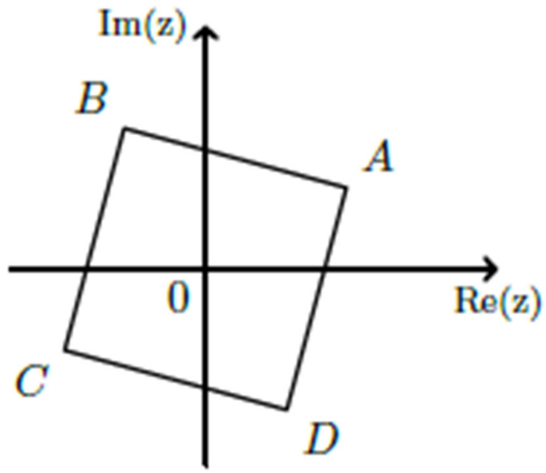
Determine z, sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma algébrica.

Dizemos que um número complexo w é uma raiz de ordem n de um número complexo z, se e só se, $w^n = z$

R: $z = -8$

Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$, cujo centro coincide com a origem do referencial.

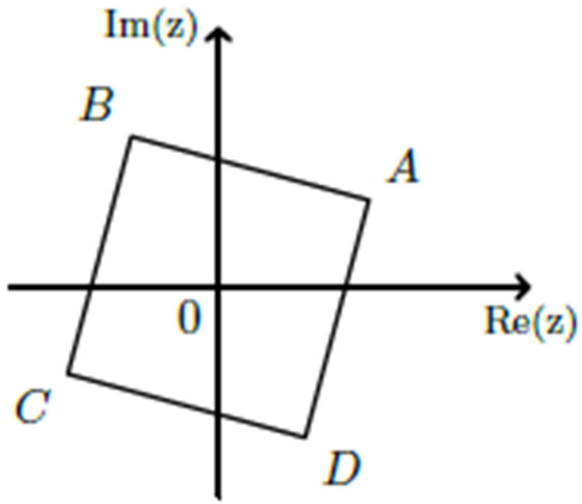


Os pontos A, B, C e D são os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 respetivamente.

A que é igual $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Como os pontos A e C são equidistantes da origem e o respetivo ponto médio é a origem, temos que são afixos de números complexos simétricos, $z_3 = -z_1$



Do mesmo modo temos que os pontos B e D são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_4 = -z_2$

Logo

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0$$