S2 • Revisão

Limites notáveis

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x^{p}}=+\infty,\quad p\in\mathbb{R}$$

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = xe^{3+x} + 2x$$

Mostre recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$

Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{3+x} + 2\right) = e^{-\infty} + 2 = 2$$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)= \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-2x\right)= \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}+2x-2x\right)= \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}\right)= \\
&= e^{3}\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)^{\left(0\times\infty\right)}= \\
&= e^{3}\times 0=0
\end{aligned}
$$

Concluímos, assim, que a reta de equação $y=2x$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f, quando $x\to-\infty$

2. Calcule os seguintes limites:

2.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}}_{L.N.}}$$

$$=1$$

(1)

Mudança de variável:

Fazendo $y=\ln x$ vem que $x=e^y$

Se $x\to 1$ então $y\to 0$

2.2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)^3}{3x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)^3}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{(1)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{3}\ln(x+1)}{\cancel{3}x}$$

$$\underset{(2)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{L.N.}}=$$

$$=1$$

(1)

$\log_a x^y = y\log_a x, a>1$

(2) Mudança de variável:

Fazendo $y=\ln(x+1)$

vem que $x=e^y-1$

Se $x\to 0$ então $y\to 0$

Limite notável

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

Derivada da função logarítmica de base e

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

1. Calcule os seguintes limites:

1.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{L.N.}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=$$

$$=0$$

1.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x}{\ln\left(x^2\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\ln\left(x^2\right)} \underset{(1)}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2\ln x} =$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} =$$

$$= \frac{3}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{L.N.}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

(1)

$\log_a x^y = y\log_a x, a > 1$

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \ln\left(e^x + x\right)$$

Determine recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right)$$

Interprete o valor obtido em termos de assíntota do gráfico de f.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+x\right)-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

(1)

$$\underset{(1)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+x\right)-\ln e^x\right)=$$

$\log_a a^x = x, a>1$

(2)

$$\underset{(2)}{=}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=$$

$\log_a x-\log_a y=\log_a\left(\frac{x}{y}\right), a>1$

$$\underset{(3)}{=}\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]=$$

(3)

A função logarítmica é contínua

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{L.N.}}\right)=\ln 1=0$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico da função f quando $x \to +\infty$

3. Calcule, nos pontos em que existe, uma expressão da derivada da função f definida por:

3.1. $f(x) = 2x + \ln x$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

3.2. $f(x) = x + \ln^2(2x)$

$$f'(x) = 1 + 2(\ln(2x)) \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{2\ln(2x)}{x}$$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

Estude, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

$$f'(x)=\left(\left(x+1\right)\ln x\right)'=$$

$$=1\times\ln x+\left(x+1\right)\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\ln x+\frac{x+1}{x}=$$

$$=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=$$

$$=\frac{x-1}{x^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x-1=0\wedge x^2\neq 0\Leftrightarrow x=1$$

x	0		1	$+\infty$
f''	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\cap$	$p.i.$	$\cup$

Ordenada do ponto de inflexão $f(1) = (1+1)\ln 1 = 2 \times 0 = 0$

Podemos, assim, concluir que o gráfico da função f:

- tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,1\right[$
- tem a concavidade voltada para cima em $\left]1,+\infty\right[$
- tem um único ponto de inflexão de coordenadas $(1,0)$.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & se \quad x<0\\ x\ln x & se \quad x>0\end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

Mais exercícios: (enunciados e respetivas resoluções)

Aceda ao link abaixo:

https://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/fichas-de-trabalho/matematica-a#fun%C3%A7%C3%B5es-2