S9 • Números complexos

Sejam $z=\rho e^{i\theta}$, $z_1=\rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2=\rho_2 e^{i\theta_2}$

Multiplicação:

$$z_1\times z_2=\left(\rho_1\times e^{i\theta_1}\right)\times\left(\rho_2\times e^{i\theta_2}\right)=\left(\rho_1\times\rho_2\right)\times e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\times e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Potenciação:

$$z^n=\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n\times e^{in\theta},\ n\in\mathbb{N}$$

Propriedades da potenciação

- $\left|z^n\right| = |z|^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $z^{-n} = \rho^{-n} e^{i(-n\theta)}, \forall n \in \mathbb{N}$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \dfrac{(-1-i)^8}{\left(e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^2} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{2}\right)}$

Verifique, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que

$z = 16e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos.

Considere $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \dfrac{-2}{iz_1}$

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $\left(z_2\right)^n$ é um número real negativo.

$$iz_1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}\right)i$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$= e^{i\left(\frac{7}{6}\pi\right)}$$

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1}$$

$$(z_2)^n = 2^n e^{i\left(\frac{-n\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{2e^{i\pi}}{e^{i\left(\frac{7}{6}\pi\right)}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$(z_2)^n \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow Arg\left((z_2)^n\right) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n\pi}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = -6 - 12k, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 : n = 6$$

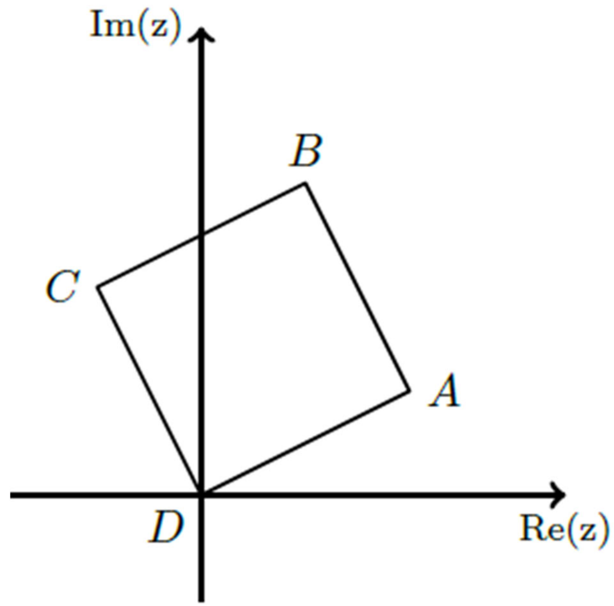
R: $n = 6$

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Seja $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right]$

Mostre que $$\frac{\cos(\pi - \alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{i(\pi - 2\alpha)}$$

Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.



Sabe-se que o ponto A é o afixo de um número complexo z e que o ponto D é o afixo do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo é o ponto B?

(A) $z(1+i)$ (B) iz (C) $i^3 z$ (D) $z(2+i)$

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad z_B = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_B = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \rho e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = Z \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = z(1+i)$$

Na figura ao lado, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos: W, z_1, z_2, z_3 e z_4.

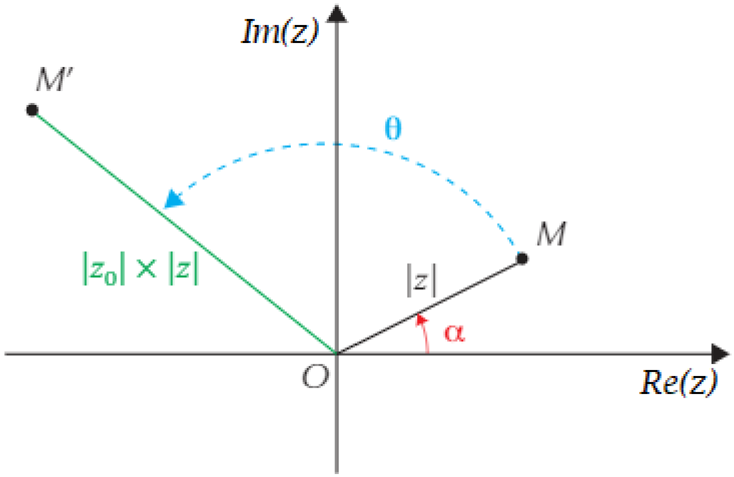
Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

$$\frac{w}{3i} = w \times \frac{1}{3i} = w \times \left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{\rho}{3} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

R: A

Interpretação geométrica da multiplicação e da divisão de um número complexo por outro da forma $\left|z_0\right|e^{i\theta}$



M é o afixo de z $\quad \left(z = \left|z\right|e^{i\alpha}\right)$

M' é o afixo de $\left|z_0\right|e^{i\theta} \cdot z$

$$z \times z_0 = \left|z\right| \times \left|z_0\right| e^{i(\alpha+\theta)}$$

Dado um número complexo z_0, não nulo, de argumento θ e um número complexo de afixo M, tem-se que o afixo do número complexo $z_0 \times z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e amplitude θ, composta com a homotetia de centro O e razão $\left|z_0\right|$.

Quais são os números complexos que, elevados ao cubo, dão $8i$?

A equação $z^3 = 8i$ traduz o problema.

Resolver esta equação equivale a determinar as **raízes de ordem 3** (raízes cúbicas) do número complexo $8i$.

Tem-se que $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ e seja $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \rho^3 e^{i(3\theta)} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \rho^3 = 8 \wedge 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \rho = 2 \wedge \theta = \frac{\pi + 4k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$$

As soluções da equação $z^3 = 8i$ são da forma

$$2e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)}, \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Para $k=0$, vem $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ $2e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k=1$, vem $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Para $k=2$, vem $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Para $k=3$, vem $z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)} = z_0$

Para $k=4$, vem $z_4 = z_1$

Daqui se conclui que a equação $z^3 = 8i$ tem três e só três soluções, ou seja, há três e só três raízes de ordem 3 do número complexo $8i$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

No caso geral:

Dado um número complexo $w = \rho e^{i\theta}$, não nulo e um número natural $n \geq 2$, a equação $z^n = w$ tem exatamente n soluções:

$$z_k = \sqrt[n]{w}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0,1,2,\ldots n-1\}$$

As raízes determinadas designam-se por **raízes n-ésimas de w** ou **raízes de ordem n de w.**

Esta propriedade é habitualmente sintetizada na seguinte fórmula (conhecida por **Fórmula de De Moivre da radiciação**):

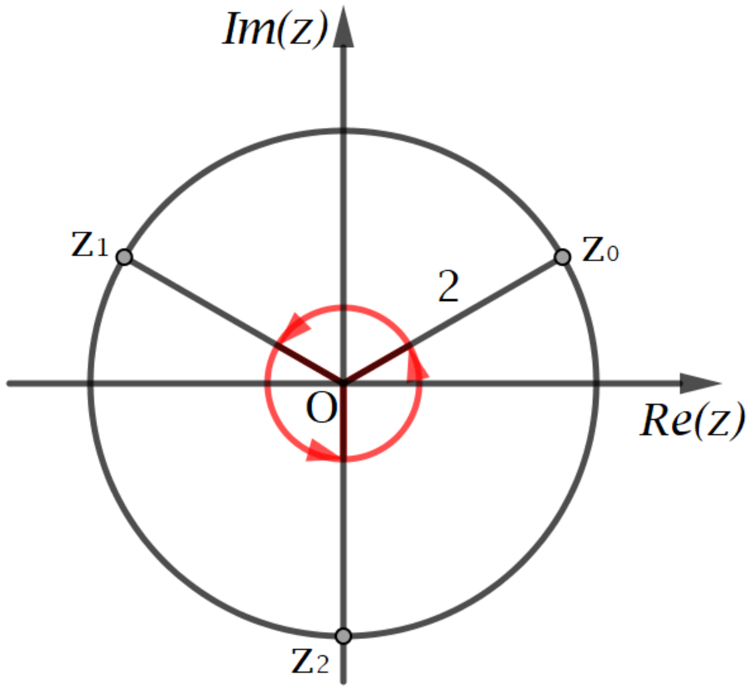
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \;\; e \;\; n \in \mathbb{N}\right)$$

Representação geométrica das raízes índice 3 de $8i$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$Arg(z_1) - Arg(z_0) = \frac{2\pi}{3}$$

$$Arg(z_2) - Arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}$$



Resumo:

- As raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ são extamente n.
- As raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ têm todas o mesmo módulo.
- Os afixos das raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ dispõem-se ao longo de uma circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt[n]{\rho}$ e dividem-na em n partes iguais.
- Os argumentos das n raízes correspondentes a valores de k consecutivos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.
- Os afixos das n raízes de ordem n de $\rho e^{i\theta}$ são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$.