Inversa de uma restrição da função quadrática

e

Inversa da função cúbica

Telensino

Função com radical quadrado

$$f : IR \to IR_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

A função f não é injetiva

$$f_1 : IR_0^+ \to IR_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

A função f_1 é uma função bijetiva.
f_1 é uma restrição da função f a IR_0^+

Inversa da função f_1 : $f_1(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{y}$

$$f_1^{-1} : IR_0^+ \to IR_0^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

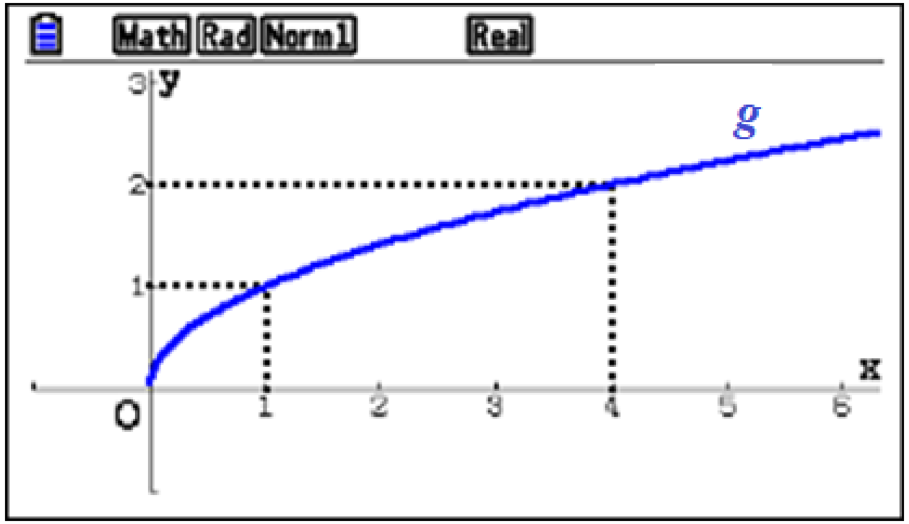
f_1^{-1} Função raiz quadrada

Em termos gráficos:

(chamemos ***g*** à função f_1^{-1})

$$g(x) = \sqrt{x}$$

x	$g(x)$
1	1
4	2
a	$\sqrt{a}$



- D= IR_0^+
- CD= IR_0^+
- Zero: 0
- Concavidade voltada para baixo
- A função é estritamente crescente
- 0 é mínimo da função

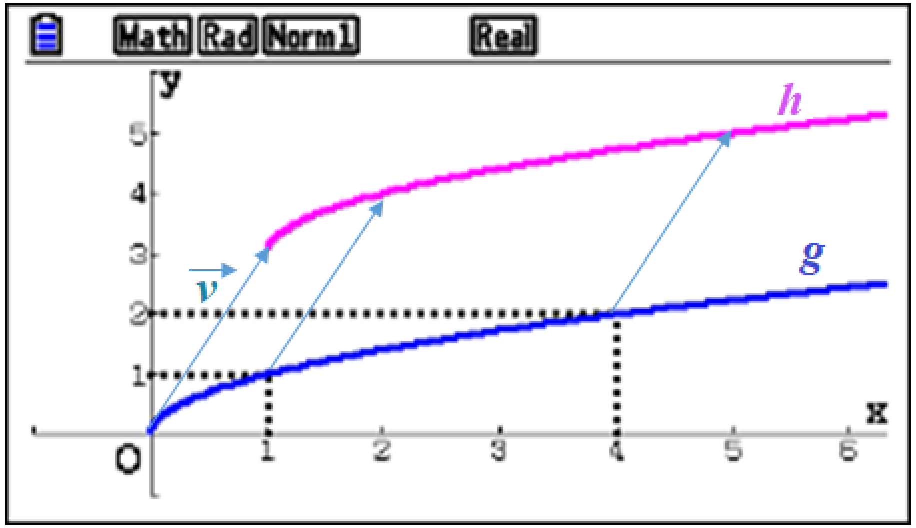
Transformações do gráfico de g

O gráfico da função g sofreu uma translação associada ao vetor $\vec{v} = (1,3)$.

Represente o gráfico da função obtida através dessa transformação.

- Características que se mantêm inalteradas:

- Monotonia- Estritamente crescente
- Concavidade voltada para baixo



$h(x)= g(x-1)+ 3$

- Características que se alteram:

- domínio: $[1,+\infty[$
- contradomínio: $[3,+\infty[$
- mínimo: 3
- a função não tem zeros

Exercício 1

Considere a função real de variável real definida por

$$h(x) = -2\sqrt{x+1} + 2$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de h.

b) Faça um esboço do gráfico de h.

c) Caracterize a inversa de h.

d) Resolva, em IR, a equação $h(x)=1$

$$h(x) = -2\sqrt{x+1} + 2$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de h.

$$D = \{x \in IR : x+1 \geq 0\} = [-1,+\infty[$$

Contradomínio:

Dois processos

- 1º processo

$$-2\sqrt{x+1} + 2 = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{2-y}{2}$$

$$\frac{2-y}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2$$

$$CD_h =]-\infty,2]$$

- 2º processo

$$\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{x+1} + 2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow h(x) \leq 2$$

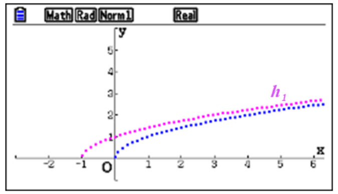
$$CD_h =]-\infty,2]$$

$$h(x) = -2\sqrt{x+1} + 2$$

b) Faça um esboço do gráfico de h.

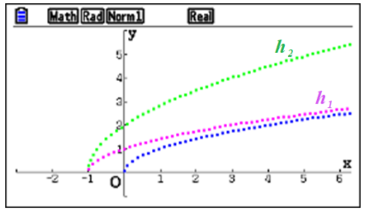
Vamos obter o gráfico de h a partir do gráfico de $y = \sqrt{x}$

$$h_1(x) = \sqrt{x+1}$$



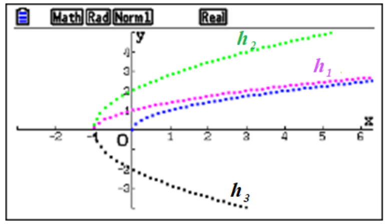
Translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(-1,0)$

$$h_2(x) = 2\sqrt{x+1}$$



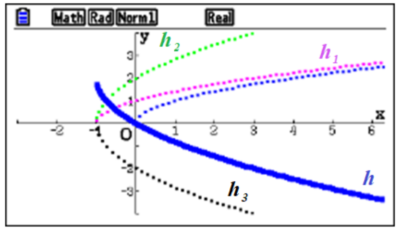
Dilatação vertical de coeficiente 2

$$h_3(x) = -2\sqrt{x+1}$$



Reflexão de eixo Ox

$$h(x) = -2\sqrt{x+1} + 2$$



Translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0,2)$

c) Caracterize a inversa de *h*.

$$-2\sqrt{x+1}+2=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{2-y}{2} \underset{y\leq 2}{\Leftrightarrow} x+1=\left(\frac{2-y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\left(\frac{2-y}{2}\right)^2-1$$

$$h^{-1}(x)=\left(\frac{2-x}{2}\right)^2-1$$

$$h^{-1} : \left]-\infty,2\right] \to \left[-1,+\infty\right[$$

$$x \mapsto \left(\frac{2-x}{2}\right)^2-1$$

$$h(x) = -2\sqrt{x+1} + 2$$

d) *Resolva, em IR, a equação* $h(x)=1$

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x+1} + 2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$CS = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$$

Exercício 2

Resolva, em IR, a equação

$$\sqrt{7+2x^2}=2x-1 \Rightarrow \left(\sqrt{7+2x^2}\right)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 7+2x^2=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow -2x^2+4x+6=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{-4} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$$

Verificação

$x=3$

$\sqrt{7+18}=6-1 \Leftrightarrow \sqrt{25}=5$ *Proposição verdadeira*

$x=-1$

$\sqrt{7+2}=-3 \Leftrightarrow 3=-3$ *Proposição falsa*

$$CS=\{3\}$$

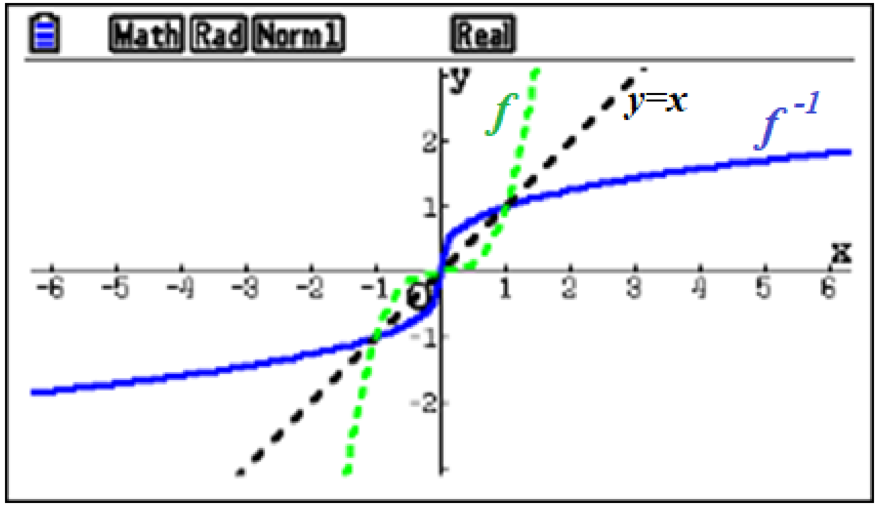
Telensino

Função com radical cúbico

$$f : IR \rightarrow IR$$
$$x \mapsto x^3$$

(*f é uma* função bijetiva)

$$f^{-1} : IR \rightarrow IR$$
$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$



- D=IR
- CD=IR
- Zero: 0
- Concavidade:
  - Voltada para cima em]-∞,0]
  - Voltada para baixo em [0,+∞[
- A função é estritamente crescente
- Não possui extremos

Exercício 3

Resolva, em *IR*, a equação: $\sqrt[3]{2x - x^2} = -2$

$$\sqrt[3]{2x - x^2} = -2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x - x^2}\right)^3 = (-2)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = -8 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 8}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

$$CS = \{-2, 4\}$$

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

Exercícios que envolvem:

- a função inversa das restrições bijetivas das funções quadráticas e cúbicas
- equações onde surgem radicais quadráticos e cúbicos