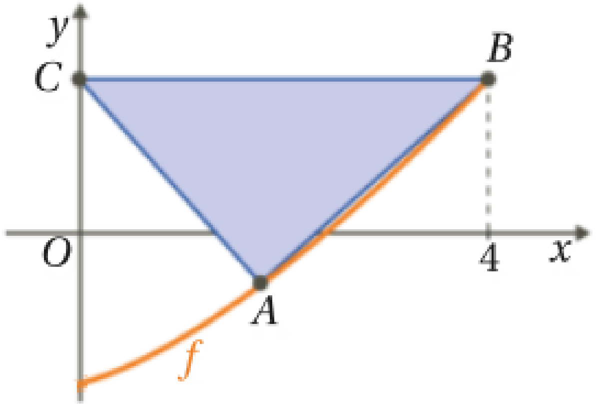
Resolução de problemas

1-

Considere a função *f* definida em [0,4] por : $f(x)=\sqrt{x^3+x}-4$

Na figura estão representados, num referencial ortonormado xOy o gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f;
- o ponto B tem abcissa 4 e o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de B;
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 5.

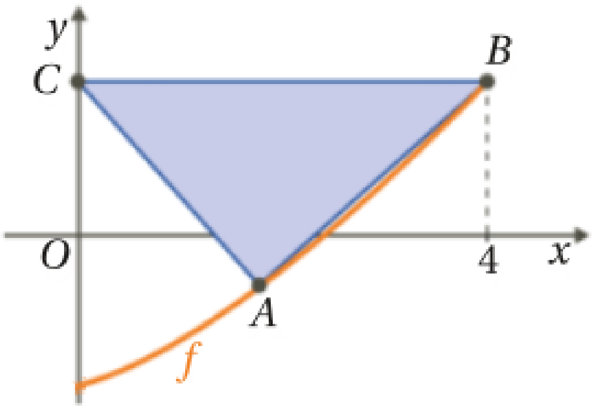
Recorrendo à calculadora gráfica determine a abcissa do ponto A.

Na sua resposta deve:

- escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$, em função da abcissa do ponto A;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos da funções que visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Máximo 10
Porto Editora

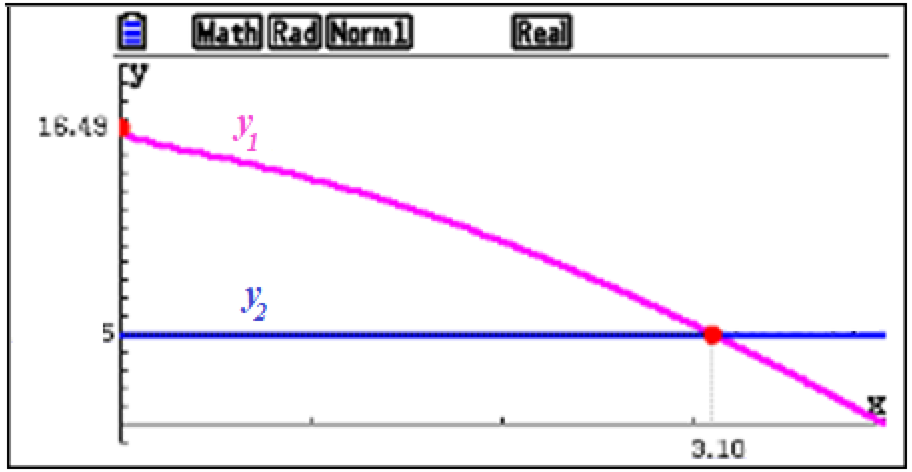
Resolução: $f(x)=\sqrt{x^3+x}-4$



$$A_{[ABC]}=5 \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}\times altura}{2}=5 \Leftrightarrow \frac{4\left(\sqrt{68}-4-f(x)\right)}{2}=5 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{68}-4-f(x)\right)=5$$

$y_1=2\left(\sqrt{68}-4-f(x)\right)$

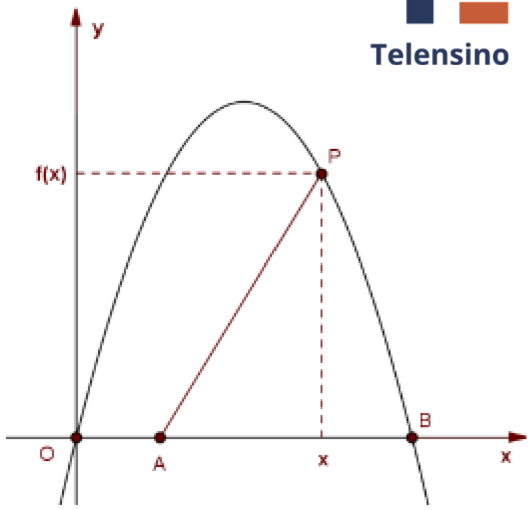
$y_2=5$



$R:$ A abcissa de A é 3,10 (aproximadamente)

2-

Na figura junta está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ e o ponto A de coordenadas (1,0).



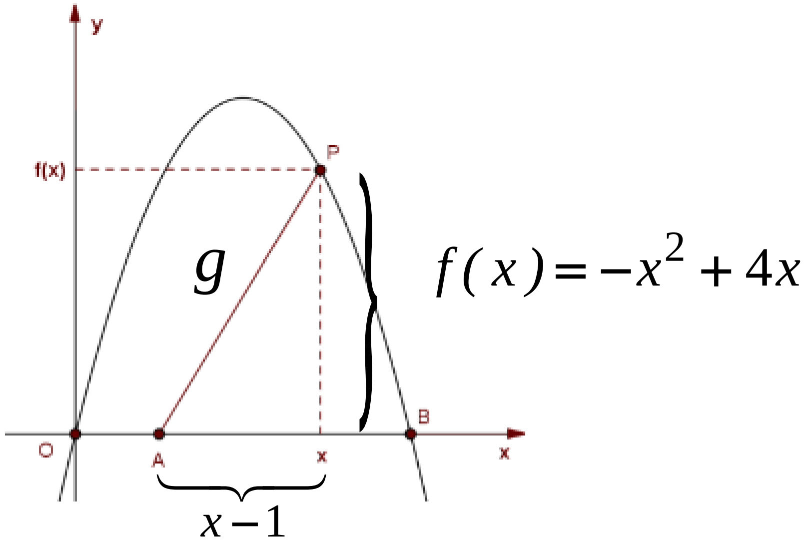
Considere a função g que associa a cada x a distância entre A e o ponto do gráfico de f de abcissa x.

a) Prove que para todo x, $g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$

b) Sabendo que existem exatamente dois pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A, indique o valor exato da abcissa de um deles e utilize a calculadora gráfica para obter um valor aproximado às décimas da abcissa do outro, explicando o procedimento utilizado.

c) Existe um ponto em que os gráficos de f e g se intersetam. Determine-o por métodos analíticos e interprete geometricamente o resultado obtido.

a) Prove que para todo x, $g(x)=\sqrt{x^4-8x^3+17x^2-2x+1}$



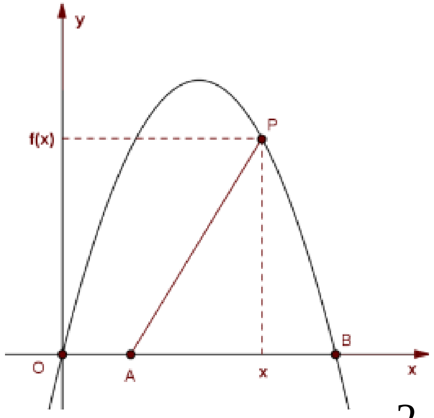
$g(x)=\overline{AP}$

$\overline{AP}^2=(x-1)^2+(-x^2+4x)^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2=x^2-2x+1+x^4-8x^3+16x^2$

$\Leftrightarrow \overline{AP}=\sqrt{x^4-8x^3+17x^2-2x+1}$

Portanto $g(x)=\sqrt{x^4-8x^3+17x^2-2x+1}$ *c.q.m.*

b) Sabendo que existem exatamente dois pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A, indique o valor exato da abcissa de um deles e utilize a calculadora gráfica para obter um valor aproximado às décimas da abcissa do outro, explicando o procedimento utilizado.

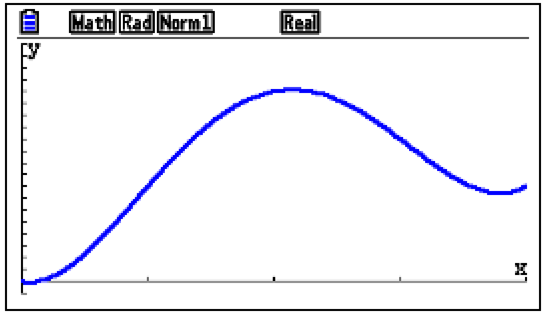


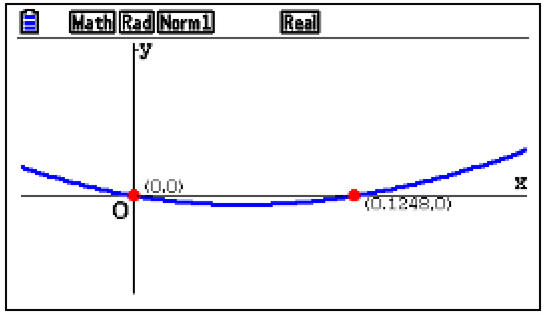
$$f(x) = -x^2 + 4x$$

$$g(x)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^4-8x^3+17x^2-2x+1}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^4-8x^3+17x^2-2x+1}\right)^2=1^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-8x^3+17x^2-2x+1=1 \Leftrightarrow x^4-8x^3+17x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^3-8x^2+17x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^3-8x^2+17x-2=0$$





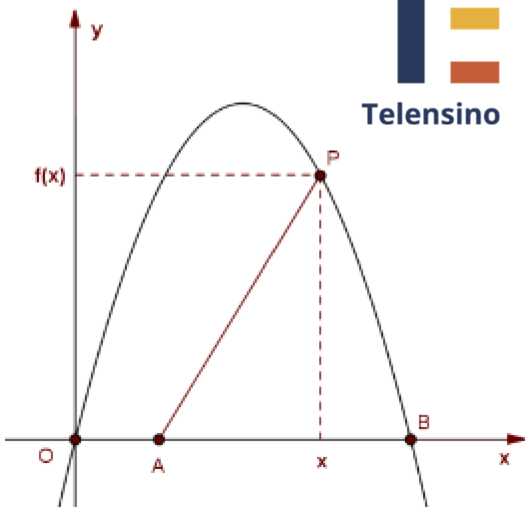
Utilizando o zoom box

R: $x=0$ ou $x=0{,}12$

c) Existe um ponto em que os gráficos de f e g se intersetam.

Determine-o por métodos analíticos e interprete geometricamente o resultado obtido.

$f(x) = -x^2 + 4x$



$$g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$$

$$\Rightarrow \left(-x^2 + 4x\right)^2 = \left(\sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}\right)^2 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Verificação:

$x = 1 \Rightarrow -1 + 4 = \sqrt{1 - 8 + 17 - 2 + 1}$ Proposição verdadeira

R: Ponto A.

Quando $x = 1$ deixamos de ter um triângulo pois a hipotenusa coicidirá com um dos catetos.

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- problemas que envolvem funções com radicais quadráticos e cúbicos