S3 • Estudo de funções exponenciais e logarítmicas

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & se \quad x<0\\ x\ln x & se \quad x>0\end{cases}$$

1.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

Como a função f é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, só a reta de equação $x=0$ pode, eventualmente, ser assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{4x} - 1}{x}} =$$

(1) Mudança de variável:

Fazendo $y = 4x$

Se $x \to 0^-$ então $y \to 0^-$

$$= \frac{\overbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}^{L.N.}}{4 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} =$$

$$\underset{(1)}{=} \frac{1}{4 \times \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{L.N.}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln x) \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$\underset{(1)}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln y}{y} =$$

$$= -\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y}}_{L.N.} = 0$$

(1) Mudança de variável:

Fazendo $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

Se $x \to 0^+$ então $y \to +\infty$

Como ambos os limites laterais são finitos, pode concluir-se que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota do gráfico de f.
Portanto, o gráfico de f não admite qualquer assíntota vertical.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(x+1)-x\ln x+3x & se \quad x>0 \\ xe^{1-x} & se \quad x\leq 0 \end{cases}$$

2.1. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

Quando $x\to+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x+1)-x\ln x+3x}{x}=$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)\overset{\infty-\infty}{=}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=3+\ln(1)=3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-3x\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(x+1\right)-x\ln x+3x-3x\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(x+1\right)-x\ln x\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{(0\times\infty)}=$$

$$=$$

2.2. Determine o valor de $\lim_{x \to -1} \frac{f(-1) - f(x)}{x^2 - 1}$.

$$f(x) = xe^{1-x}, \quad x \leq 0$$

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, definida por:

$$f(x) = 2x + \frac{x}{\ln x}$$

3.1. Estude a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

3.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extemos relativos.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{(\ln x)^2}\left(2\ln^2 x+\ln x-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln^2 x+\ln x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \vee \ln x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}} \vee x=e^{-1}$$

x	0		e^{-1}		1		$\sqrt{e}$	$+\infty$
f'	$n.d.$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	0	$+$
f	$n.d.$	$\nearrow$	máx	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	mín	$\nearrow$

Portanto, f é crescente em $\left]0, e^{-1}\right]$ e em $\left[\sqrt{e}, +\infty\right[$ e é decrescente em $\left[e^{-1}, 1\right[$ e em $\left]1, \sqrt{e}\right]$ atingindo um mínimo relativo em $x = \sqrt{e}$ e um máximo relativo em $x = e^{-1}$