# S4 • Modelos Matemáticos

A modelagem matemática é a descrição, por meio de equações, de variadas situações reais.

Estas descrições são chamadas de modelos matemáticos.

Estes modelos são utilizados em diversas áreas de estudo como, por exemplo, em Física, em Química, na Economia, em Engenharia, na Medicina, na Epidemiologia, etc.

Eis alguns exemplos:

**1.** A massa de uma substância radioativa diminui com o passar do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de $t$ horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t)=15\times e^{-0,02t}$, $t\geq 0$

**1.1.** Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioativa (semivida)?

Apresente o resultado em horas e minutos, minutos arredondados às unidades.

$$M(0)=15$$

$$M(t)=\frac{M(0)}{2}\Leftrightarrow 15\times e^{-0,02t}=7,5$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,02t}=0,5\Leftrightarrow t\approx 34,657$$

R: 34 horas e 39 minutos.

**1.2.** Verifique que, para qualquer valor de $t$ , $\dfrac{M(t+1)}{M(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondada às centésimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

$$\frac{M(t+1)}{M(t)}=\frac{15\times e^{-0,02(t+1)}}{15\times e^{-0,02t}}=e^{-0,02}\approx 0,98$$

A cada hora que passa a massa da amostra de substância radioativa diminui a uma taxa de aproximadamente 2%.

**2.** A intensidade do sinal captado por um telemóvel, que se encontra a uma distância $d$, em quilómetros, de um transmissor, pode ser estimada, numa determinada unidade, pela função:

$$I(d) = -113 - 40\log\left(\frac{d}{30}\right), \; d > 0$$

**2.1.** Num determinado momento a intensidade do sinal captado por um telemóvel é, na unidade considerada, igual a $-78$
Determine a que distância se encontra o telemóvel do transmissor?
Apresente o resultado em quilómetros, com aproximação às unidades.

Resposta: O telemóvel encontra-se a cerca de 4 km do transmissor.

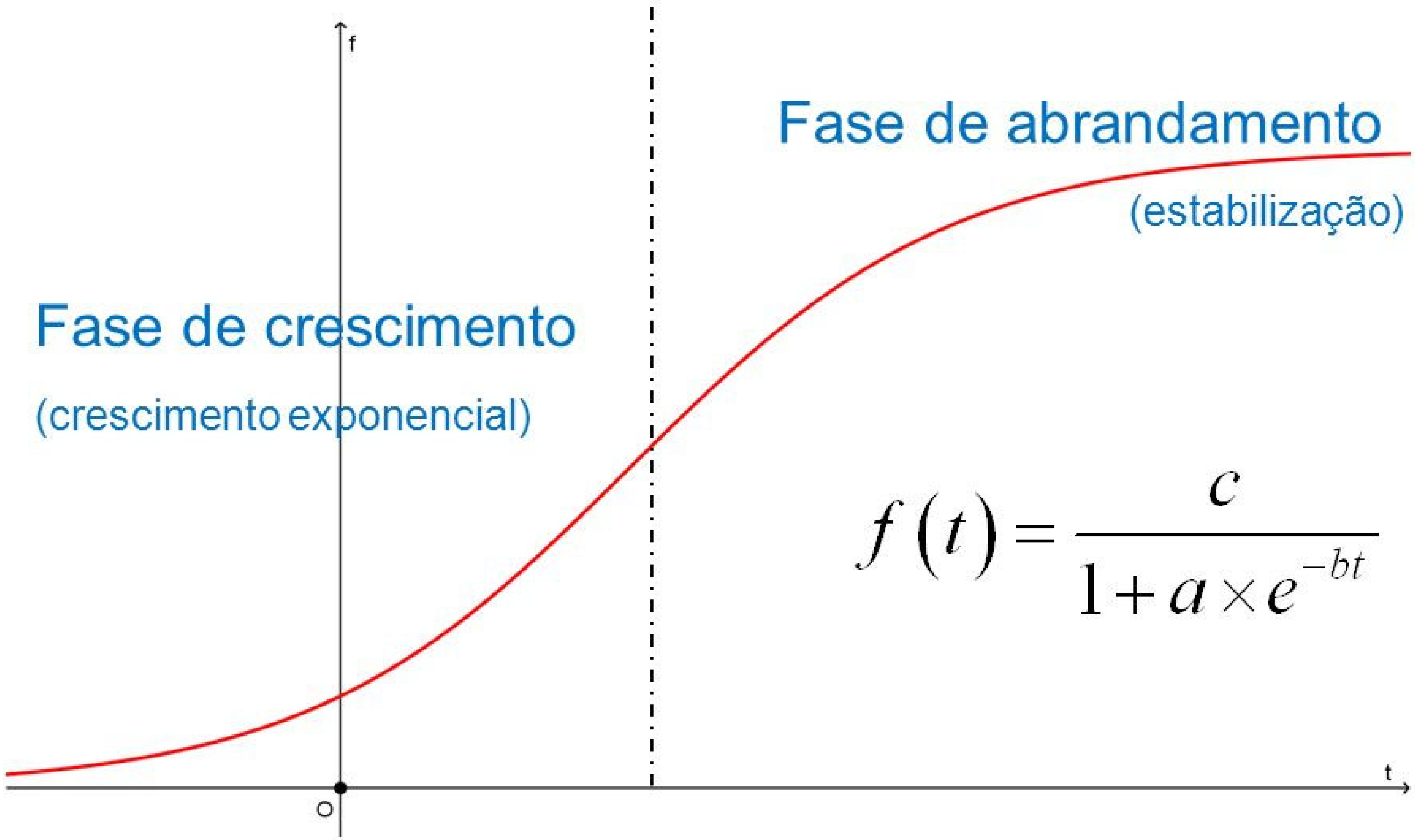
**2.2.** Verifique que, para qualquer valor de $d$, a diferença $I(d)-I(2d)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

$$I(d)=-113-40\log\left(\frac{d}{30}\right)$$

Quando a distância ao transmissor duplica a intensidade do sinal diminui 12 unidades.

# Função logística

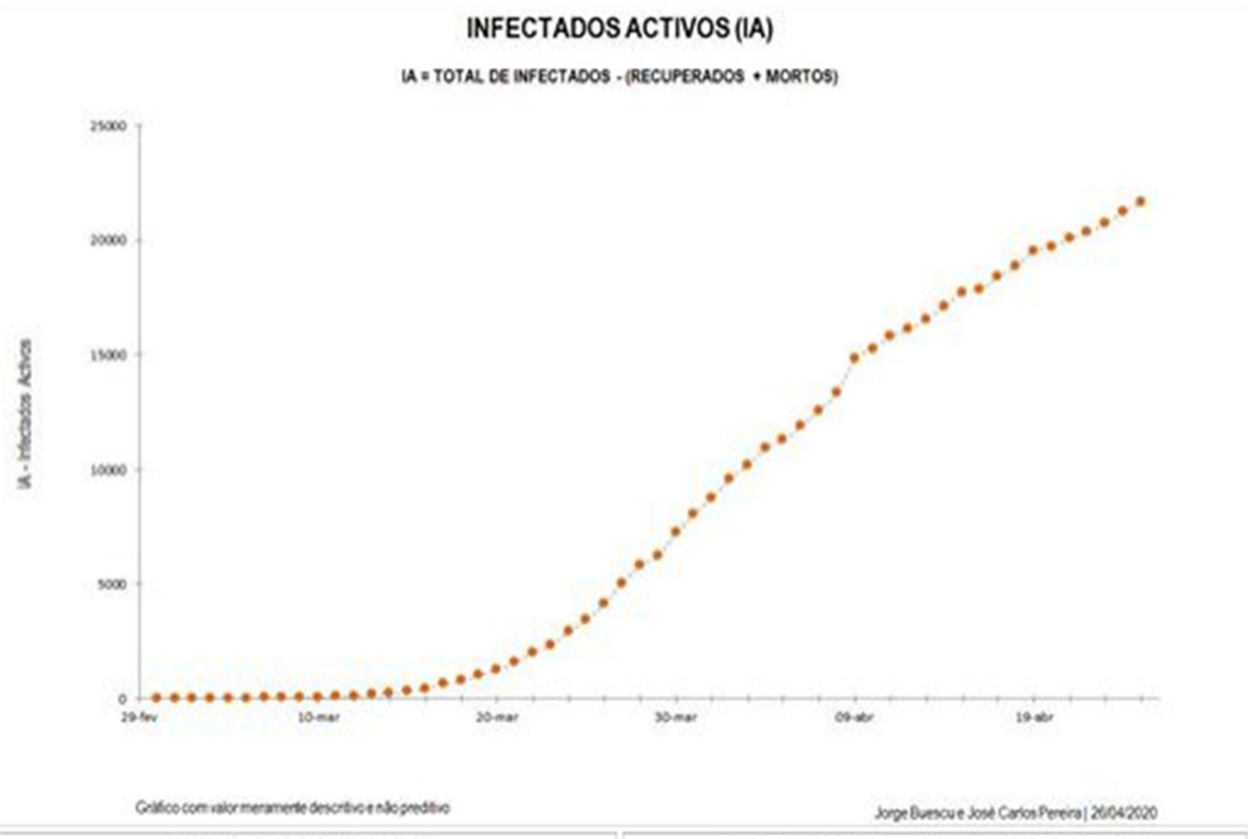
## Gráfico da função logística




Note-se que a função é estritamente crescente em todo o domínio

# COVID - 19 26-04-2020

https://www.facebook.com/josecarlos.per…/…/2718103601644960…...
Ver mais



**3.** A bateria de um automóvel elétrico é ligada a um carregador.

O nível de carga da bateria, em percentagem, $t$ horas após ter sido ligada a um carregador, é dado por uma função do tipo

$$C(t)=\frac{100}{1+a\times 2^{-bt}}, t\geq 0$$

onde $a$ e $b$ designam constantes positivas.

$a$ depende do nível de carga ainda existente na bateria, quando se inicia o carregamento, e a constante $b$ do tipo de carregador utilizado.

A bateria de um dado modelo de automóvel foi posta a carregar com um nível inicial de carga de $20\%$ e após $5$ horas de carregamento, o nível de carga estava em $80\%$.

**3.1.** Mostre que $a=4$ e que $b=0,8$ $\qquad C(t)=\dfrac{100}{1+a\times 2^{-bt}}$

$$\begin{cases} C(0)=20 \\ C(5)=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{100}{1+a\times 2^{0}}=20 \\ \dfrac{100}{1+a\times 2^{-5b}}=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ \dfrac{100}{1+2^{2}\times 2^{-5b}}=80 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ \dfrac{100}{80}-1=2^{-5b+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ 2^{-2}=2^{-5b+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0,8 \end{cases}$$

Logo $C(t)=\dfrac{100}{1+4\times 2^{-0,8t}}, t\geq 0$

**3.2.** Determine o tempo de carregamento necessário para que o nível de carga atinja os $60\%$. Apresente o resultado em horas arredondado às décimas.

$$C(t)=60 \Leftrightarrow \frac{100}{1+4\times 2^{-0,8t}}=60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{60}-1=2^{-0,8t+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}-1=2^{-0,8t+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2}{3}\right)=-0.8t+2 \Leftrightarrow t\approx 3,2$$

São necessárias cerca de 3,2 horas.

**3.3.** Determine $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

$$\lim_{t \to +\infty} C(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{100}{1 + 4 \times 2^{-0,8t}}$$

Com o passar do tempo a bateria fica completamente carregada.

**4.** Considere que a capacidade pulmonar média de um ser humano, com idade superior ou igual a oito anos, é dada, em litros, em função da respetiva idade $x$, em anos, por

$$C(x)=100\times\frac{-2+\ln x}{x}, x\geq 8$$

**4.1.** Determine a capacidade pulmonar média de uma pessoa com $25$ anos. Apresente o resultado em litros, arredondado às centésimas.

$$C(25)=100\times\frac{-2+\ln 25}{25}\approx 4,88$$

A capacidade pulmonar média de uma pessoa com 25 anos é cerca de 4,88 litros.

**4.2.** Mostre que $C'(x)=\frac{100}{x^2}(3-\ln x)\ \ x\geq 8$ e determine, analiticamente, em que idade a capacidade pulmonar média é máxima. Apresente o resultado arredondado às unidades.

$$C(x)=100\times\frac{-2+\ln x}{x}$$

$$C'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{100}{x^2}(3-\ln x)=0 \Leftrightarrow x=e^3$$

| $x$ | $8$ | | $e^3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | min | $\nearrow$ | *máx* | $\searrow$ |

Podemos, assim, concluir que aos 20 anos a capacidade pulmonar média é máxima.