Telensino

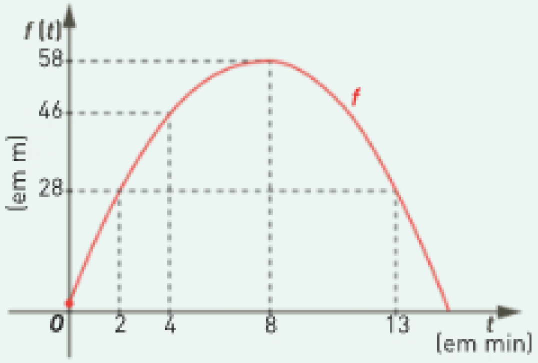
Taxa Média de Variação

e

Taxa Instantânea de Variação

Admite que, num dado instante, um balão foi lançado e a altura do balão ao solo, t minutos após o lançamento é dada, em metros, pela função f, sendo $f(t) = -t^2 + 15t + 2$.

A seguir, em referencial ortogonal, está representada a função f.



1 A variação da função f no intervalo $[a, b]$ é dada por $f(b) - f(a)$.
Determina a variação da altura, em metros, no intervalo $[4, 8]$

2 A taxa média de variação de f entre a e b (ou em $[a, b]$), em m/min, é dada por $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Determina a taxa média de variação de f em $[4, 8]$

Novo Espaço
Porto Editora

Telensino

1. Variação da altura = $f(8) - f(4) = 58 - 46 = 12$

2. $\underbrace{\text{Taxa média de variação no intervalo [4,8]}}_{t.m.v(f, 4, 8) = t.m.v_{[4,8]}}$= $\frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \frac{12}{4} = 3$

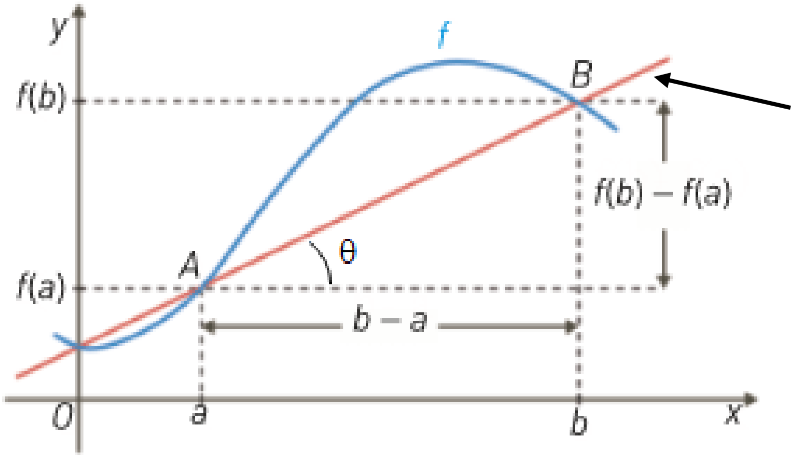
Taxa Média de Variação

Dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do seu domínio, chama-se **taxa média de variação de f entre a e b** a:

$$t.m.v.(f,a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- b-a representa a variação de x;
- $f(b)$-$f(a)$ representa a variação de $f(x)$ quando x varia de a para b;
- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ representa a variação de $f(x)$ por cada unidade de variação de x quando o seu valor passa de a para b;

Interpretação geométrica da Taxa média de variação



Reta secante ao gráfico de f , definida pelos pontos $A(a,f(a))$ e $B(b,f(b))$

O declive da reta AB , $m_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\theta$

1. Seja f uma função e domínio IR.

Sabe-se que: $\forall h \in IR, \quad f(3+h) - f(3) = h^2 + 6h$

Adaptado Novo Espaço
Porto Editora

1.1 Determine o valor da $t.m.v._{[3,5]}$

$$t.m.v._{[3,5]} = \frac{f(5) - f(3)}{5-3} = \frac{16}{2} = 8$$

$$h = 2$$

$$f(5) - f(3) = 4 + 12 = 16$$

1.2 Sabendo que f (3)=1, escreva a equação da reta secante ao gráfico da função f ,que passa nos pontos de abcissas 3 e 5.

Seja s a reta secante

$$m_s = t.m.v._{[3,5]} = 8 \qquad s: y = 8x + b$$

$$(3,1) \in s \Leftrightarrow 1 = 8 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -23$$

$$s: y = 8x - 23$$

2. Relativamente a uma função f, sabe-se que $t.m.v._{[a,b]}$ é positiva.

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

I: $f(b)>f(a)$

II: f é necessariamente crescente em $[a,b]$

Novo Espaço
Porto Editora

R: A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa

3. Considera, num referencial o.n., o gráfico de uma função f e a reta r que interseta o gráfico de f nos pontos A e B de abcissas, respetivamente, a e b.

Sabe-se que:

- A reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 3;
- A taxa média de variação de f entre a e b é igual a -2.

Escreva a equação reduzida da reta r.

M∀T11
Texto

$$(3,0) \in r \qquad \wedge \qquad m_r = t.m.v._{[a,b]} = -2$$

$$\text{logo} \qquad r: y = -2x + b$$

$$(3,0) \in r \Leftrightarrow 0 = -6 + b \Leftrightarrow b = 6$$

r: y=-2x+6

Taxa instantânea de variação de *f* num ponto.
Derivada de uma função num ponto

Telensino

Seja *f* uma função real de variável real e x_0 um ponto do seu domínio.

Chama-se **taxa instantânea de variação de *f em* x_0** ou **derivada de *f* no ponto x_0**, ao limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

caso exista e seja finito, e representa-se por $f'(x_0)$.

Diz-se neste caso que ***f* é derivável** ou **diferenciável em x_0**.

Nota: se fizermos uma mudança de variável : $x - x_0 = h$

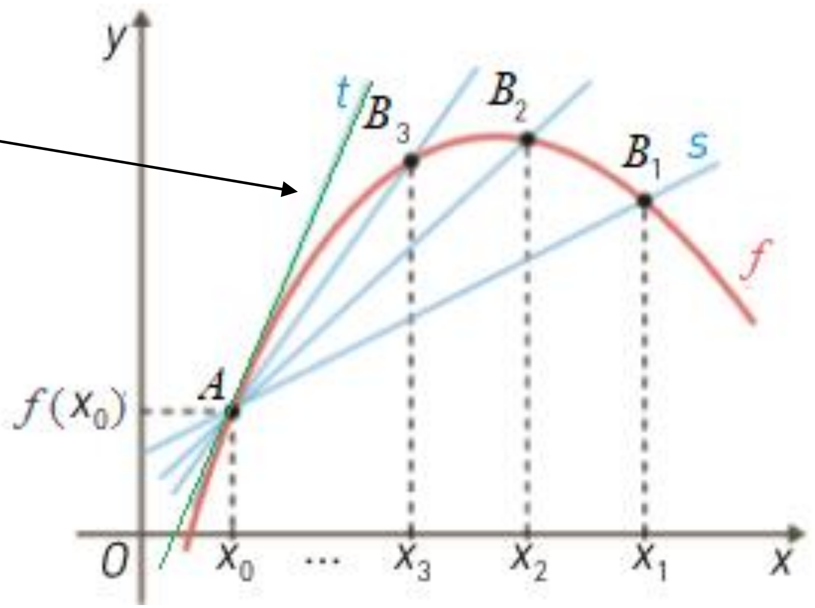
a fórmula da derivada toma outra forma:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interpretação geométrica da derivada

Reta tangente ao gráfico de f

no ponto $A(x_0, f(x_0))$

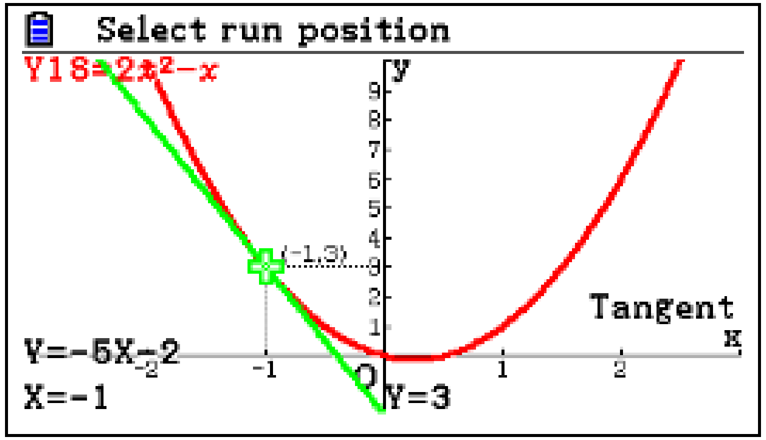


declive da reta t: $m_t = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

1. Utilizando a definição de derivada num ponto calcule $g'(-1)$, sendo g a função definida por $g(x) = 2x^2 - x$

$$g'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x - \frac{3}{2})(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} 2(x - \frac{3}{2}) = 2 \times (-\frac{5}{2}) = -5$$



C.A.

$$g(-1) = 2 \times (-1)^2 - (-1) = 3$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$

2. Considere a função *f* definida em IR$^+$ por $f(x) = \dfrac{x^3}{6}$

2.1 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $\sqrt{3}$.

2.2 Sabendo que a reta *r* tangente ao gráfico de *f* num ponto $x=a$ é perpendicular à reta *s*, de equação $y = -4x+2$, determine o valor de *a*.

Adaptado Máximo 11
Porto Editora

2.1 Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $x=\sqrt{3}$

$$m_t = f'(\sqrt{3}) = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^3 - 3\sqrt{3}}{6(x-\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+3)}{6(x-\sqrt{3})} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{(x^2+\sqrt{3}x+3)}{6} = \frac{3+3+3}{6} = \frac{3}{2}$$

C.A.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & -3\sqrt{3} \\
\sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \\
\hline
 & 1 & \sqrt{3} & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

Então $t: y = \frac{3}{2}x + b$. Como $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in t \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$

Portanto: $t: y = \frac{3}{2}x - \sqrt{3}$

2.2 Sabendo que a reta r, tangente ao gráfico de f num ponto $x=a$, é perpendicular à reta s, de equação $y= - 4x+2$, determine o valor de a.

Telensino

$$r \perp s \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s} \quad \Rightarrow m_r = \frac{1}{4}$$

Regra de Ruffini

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	0

Então $\quad f'(a) = \frac{1}{4} \quad$ isto é $\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{x^3}{6}-\frac{a^3}{6}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{6(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{6(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x^2+ax+a^2}{6} =$$

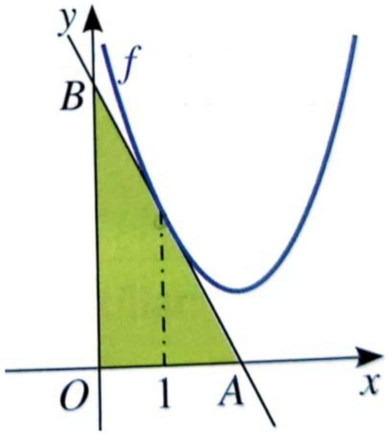
$$= \frac{3a^2}{6} = \frac{a^2}{2}$$

Então $\quad \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} \quad$ isto é $\quad a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $a \in IR^+$ então $\quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy. parte do gráfico da função f, definida por $f(x)=x^2-4x+5$; a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1; e o triângulo $[OBA]$, sendo A e B os pontos de interseção de r com os eixos Ox e Oy, respetivamente.

Calcule a área do triângulo.



Dimensões 11
Santilhana

$$A_{[OBA]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=\frac{2\times 4}{2}=4$$

$$m_r=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+5-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-3)=-2$$

C.A.

- $f(1)=1^2-4\times 1+5=2$
- $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Então } r: y=-2x+b\,. \\ (1,2)\in r \Rightarrow 2=-2+b \Rightarrow b=4\end{array}\right\}\quad r: y=-2x+4\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Se } y=0 \Rightarrow x=2 \\ \text{Se } x=0 \Rightarrow y=4\end{array}\right\}\quad A(2,0) \text{ e } B(0,4)$$

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- Determinação do valor da taxa média de variação num intervalo
- Determinação da derivada de uma função num ponto
- Interpretação geométrica da taxa média de variação num intervalo e da derivada de uma função num ponto