Limite de uma função real de variável real (continuação)

Telensino

Indeterminações (continuação)

1. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2}=\frac{0}{0}$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\&\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{aligned}\right\}\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2}=+\infty$$

$$|x|=\begin{cases}x & \text{se} & x\geq 0\\ -x & \text{se} & x<0\end{cases}$$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(4-x-3)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(2+\sqrt{x+3})}=-\frac{1}{4}$$

$$3.\ \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right) \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{x+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+3}{x+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}=\frac{3}{+\infty}=0$$

Observação:

$$\sqrt{x^2}=|x| \Rightarrow \sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

$$\sqrt{(2)^2}=2$$

$$\sqrt{(-2)^2}=2=-(-2)$$

$$4.\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}\right) \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}=\frac{-\sqrt{1+0}}{2}=-\frac{1}{2}$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}\right)\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}}=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$$

5. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2+x}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\frac{2}{\sqrt{4+0}+\sqrt{0+0}}=1$$

As indeterminações do tipo $\boxed{0\times\infty}$ podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\boxed{\frac{0}{0}}$ ou $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

1. $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\times\left(x^3-2\right)\right] \underset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

2. $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-2}{x}\times\frac{1}{x^2-4}\right] \underset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x(x-2)(x+2)} \underset{\frac{0}{0}}{=} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{8}$$

Telensino

Sabe-se que f e g são duas funções afins cujos gráficos cartesianos representados num referencial ortonormado são retas perpendiculares.

Qual poderá ser o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

(A) 0 **(B)** $+\infty$

(C) 4 **(D)** -4

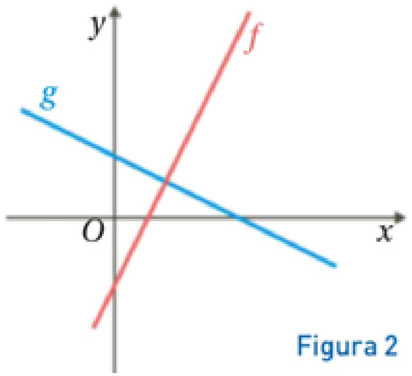


Figura 2

Máximo 11- Porto Editora

$f(x) = m_1 x + b_1 \ , \ m_1 > 0$

$g(x) = m_2 x + b_2 \ , \ m_2 < 0$

$f \perp g \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{m_1 x + b_1}{m_2 x + b_2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{m_1 x}{m_2 x} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{-\frac{1}{m_2}}{m_2} = -\frac{1}{(m_2)^2}$$

Como $(m_2)^2 > 0$ então $-\frac{1}{(m_2)^2} < 0$

A única opção que verifica esta condição é a (D)

R: (D)

Na figura 3 estão representadas partes dos gráficos de duas funções f e g.

Sabe-se que:

- g é uma função quadrática cujo gráfico é tangente ao eixo Ox num ponto de abcissa x_0;
- f é uma função polinomial com dois zeros cujo gráfico é tangente ao eixo Ox na origem do referencial e no ponto de abcissa x_0.

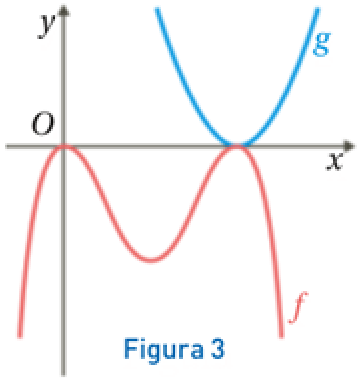


Figura 3

Indique, justificando:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$

Máximo 11- Porto Editora

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{k}{0^-} = -\infty$ com k número real positivo (por observação do gráfico)

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

A função f é uma função definida por um polinómio de grau par, superior ou igual a 4, logo possui grau superior a 2 (grau do polinómio que define g).

Propriedade:

Sejam f e g duas funções de domínios D e a um ponto aderente a D.

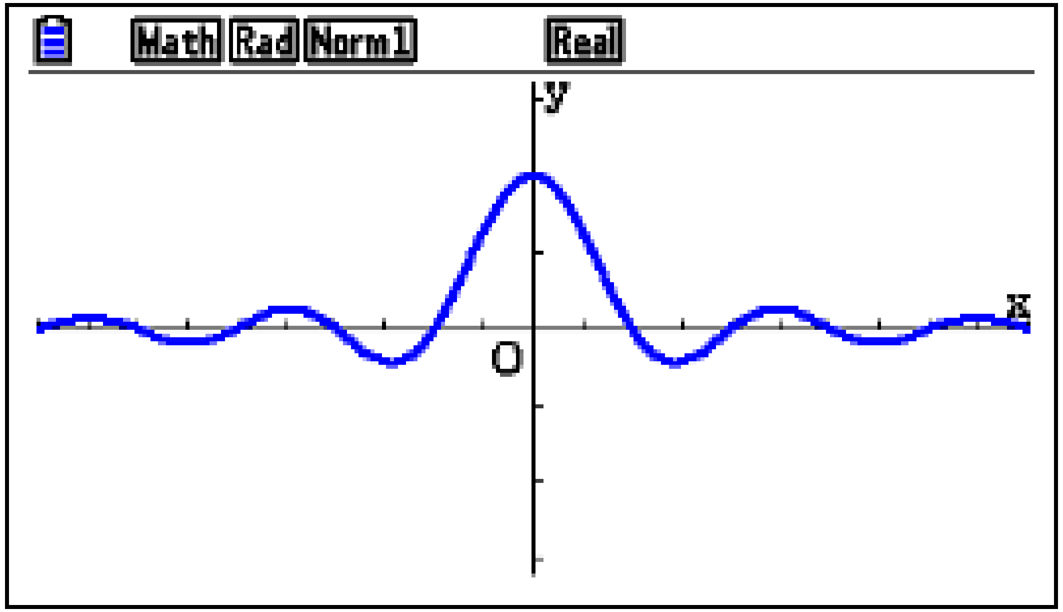
Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada, então:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \times g(x) \right] = 0$$

Esta propriedade é ainda válida para $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou quando $a = -\infty$ ou $a = +\infty$, no caso de os domínios das funções consideradas não serem, respetivamente, minorados ou majorados.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=?$$

Note-se que $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\times\sin x$



Sejam f e g funções tais que

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ e $g(x)=\sin x$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

- A função g é limitada, pois $-1\leq \sin x\leq 1,\ \forall x\in IR$

Nestas condições conclui-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\times g(x)\right]=0$ ou seja $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- Exercícios de cálculo de limites de funções envolvendo módulos e radicais quadráticos