Conclusão do tema limites

Telensino

Telensino

1. Considere a função real de variável real definida por :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{4x-8} & se \quad x<2 \\ 3 & se \quad x=2 \\ \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x} & se \quad x>2 \end{cases}$$

Regra de Ruffini

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

Calcule, caso exista :

$a)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\qquad$ $b)\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Dimensões 11
Santilhana

$a)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe sse $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{4x-8} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x^2+2x+4)}{4}=\frac{4+4+4}{4}=3 \quad ; \quad f(2)=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}{(x^2-2x)\sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Portanto não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ pois $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$$b)\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x-2}$$

$$= \frac{0}{+\infty} = 0$$

OU

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2}} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x(x+3)(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}{\left(\sqrt{3x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x+3)(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}{3x+2-x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+3)(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+3)(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}{2} = \frac{3\times 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

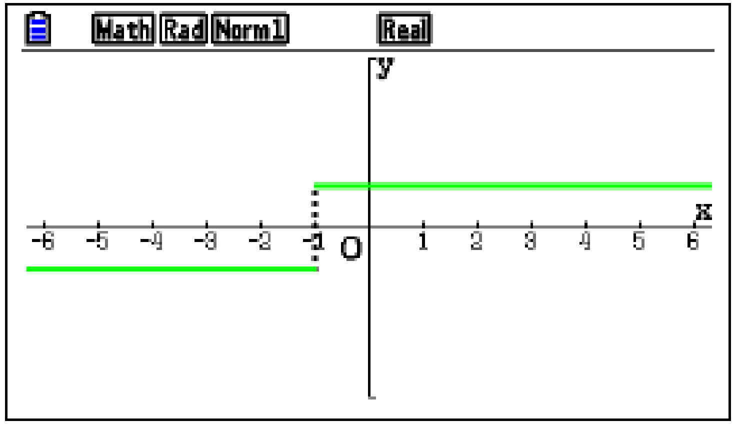
3. Qual o valor de $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x+1|}{4x+4}$?

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) 0 (D) Não existe

Expoente 11
Asa

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|}{4x+4} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{4(x+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -1-} \frac{|x+1|}{4x+4} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)}{4(x+1)} = -\frac{1}{4}$$



Opção (D)

4. Seja h a função real de variável real, de domínio $]-\infty, 2[$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases} ax^2+x & \text{se } x\leq 1 \\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & \text{se } 1<x<2 \end{cases}$$

em que a designa um número real.

Determine o valor de a de modo que exista $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

Exercício adaptado do manual Dimensões 11 Santilhana

Telensino

$$\lim_{x\to 1} h(x) \text{ existe sse } \lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^+} h(x)=h(2)$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^2+x)=a+1 \quad ; \quad h(1)=a+1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x^2-1} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

Regra de Ruffini

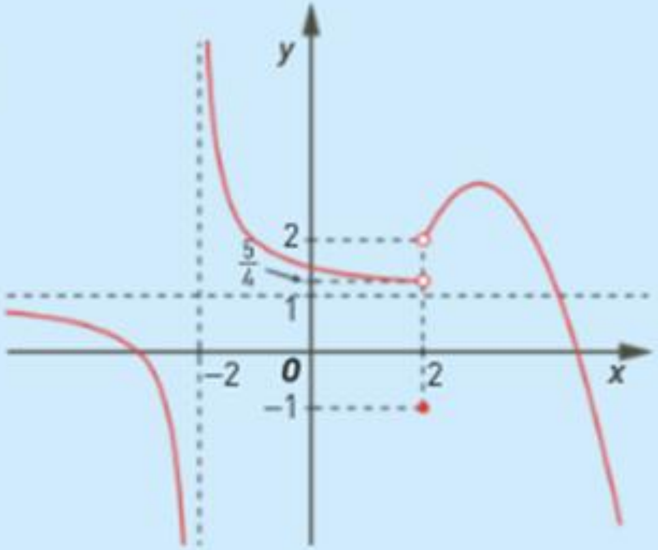
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Então $\quad a+1=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ $\qquad R: \; a=\dfrac{1}{2}$

5. No referencial da figura encontra-se representada graficamente uma função h de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Sabe-se que as retas $y = 1$ e $x = -2$ são assíntotas ao gráfico de h.

Por observação do gráfico pode afirmar-se que:



(A) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$ **(B)** $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \frac{5}{4}$ **(D)** $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = 2$

Telensino

Novo Espaço
Porto Editora

Opção (D)

6. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio IR.

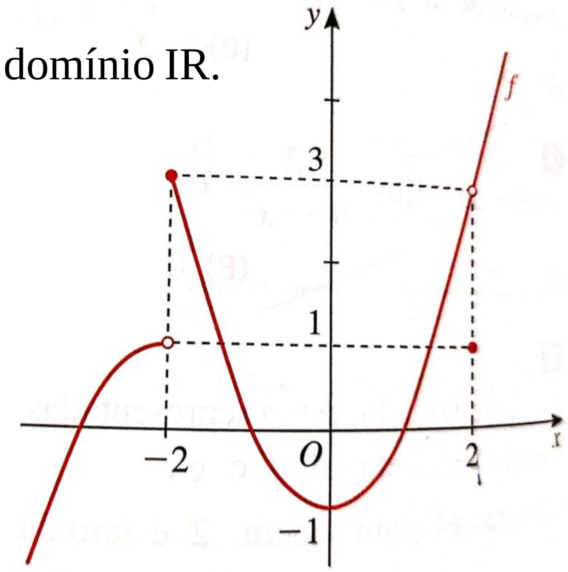
6.1 Justifique que não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

6.2 Considere as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais

$$a_n = \frac{2-2n}{n} \quad \text{e} \quad b_n = -n^2 + 3n - 5$$

De acordo com os dados da figura, indique :

a) $\lim f(a_n)$ b) $\lim f(b_n)$



Dimensões 11
Santilhana

a) $\lim a_n = \lim \frac{2-2n}{n} = \lim \frac{-2n}{n} = -2$

$\lim f(a_n) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$

$a_1 = -2 + 2 = 0$

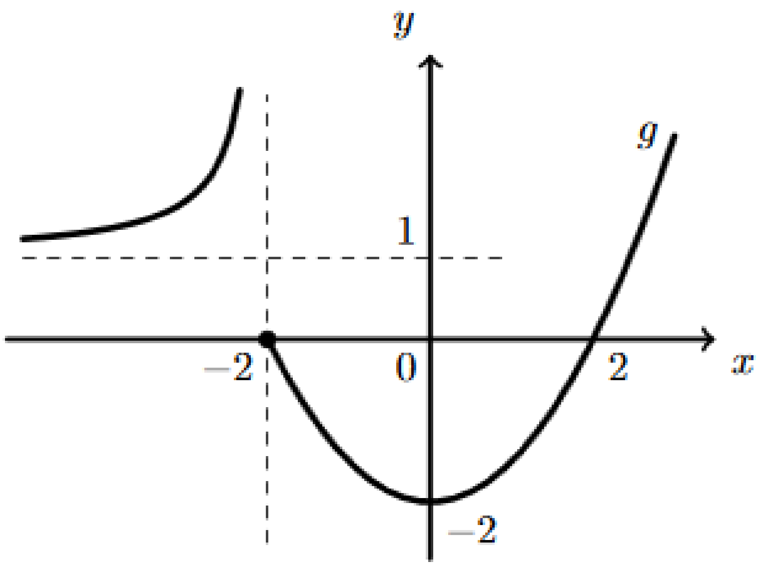
$a_2 = -2 + 1 = -1$

$a_3 = -\frac{4}{3} \; (= -1,(3))$

b) $\lim b_n = \lim(-n^2 + 3n - 5) = \lim(-n^2) = -\infty$

$\lim f(b_n) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

7. Na figura ao lado está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.
As retas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assíntotas do gráfico de g.
Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = +\infty$.
Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?



(A) $-2 + \frac{2}{n}$ (B) $-2 - \frac{1}{n}$

(C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $1 - \frac{1}{n}$

Exame – 2008, 2.ª Fase

Opção (B)

8. Seja g a função real de variável real definida em IR \ {0,2}, por

$$g(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x^2+4x}$$

Mostre que as retas de equações $x=2$ e $y=1$ são assíntotas, vertical e horizontal, respetivamente, ao gráfico de g.

A reta de equação $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de g sse $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-2)^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)}{(x-2)x}=\frac{4-1}{0}=\frac{3}{0}=\infty$$

se $x\to 2^+$ então $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$

se $x\to 2^-$ então $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\frac{3}{0^-}=-\infty$

Regra de Ruffini

	1	-2	-1	2
2		2	0	-2
	1	0	-1	0

A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g sse $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

Portanto as retas dadas são assíntotas, vertical e horizontal, respetivamente, ao gráfico de g .

9. De uma função f, real de variável, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -1$. Seja g uma função definida por $g(x) = f(x-3)$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$

(B) $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = -1$

(C) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -1$

(D) $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = -4$

Expoente 11
ASA

Opção (B)

Telensino

Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- Levantamento de indeterminações que envolvem radicais e módulos
- Limites de funções dadas graficamente
- Determinação de assintotas verticais e horizontais ao gráfico de uma função