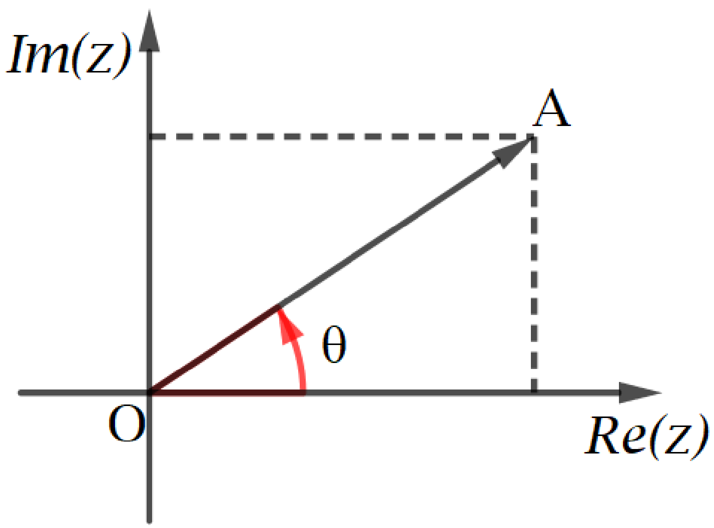
S7 • Números complexos

Forma trigonométrica de um número complexo

Argumento de um número complexo

Considere no plano complexo, a representação do ponto A, afixo de um número complexo, não nulo, $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$

Qualquer uma das amplitudes do ângulo θ formado pelo semieixo real positivo e pela semirreta $\dot{O}A$ designa-se por **argumento de z**.

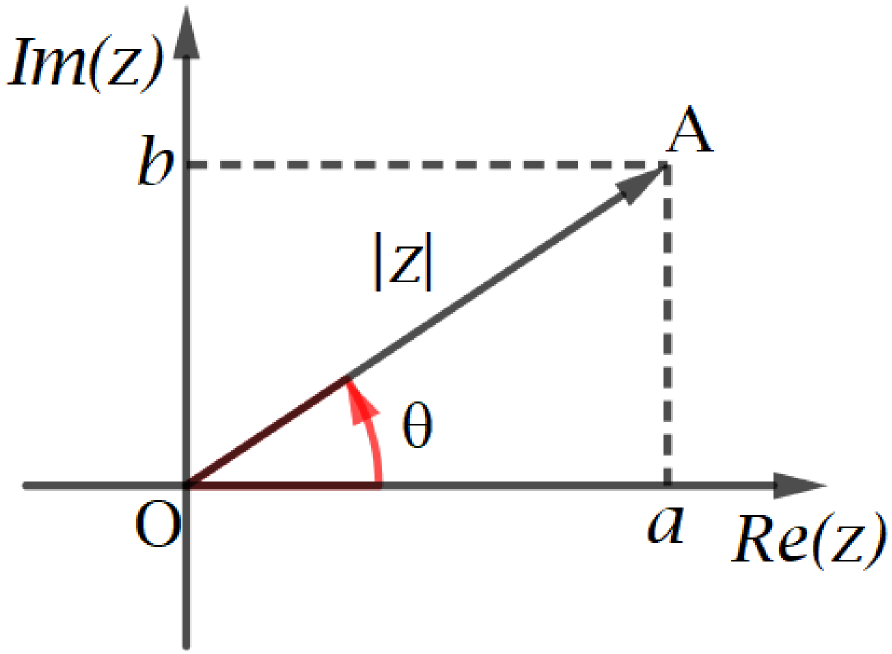


Se θ é um argumento de z, então qualquer $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ também é argumento de z.

Ao representante dos argumentos de z que pertence ao intervalo $\left]-\pi,\pi\right]$ chama-se **argumento principal** de z e representa-se por $Arg(z)$.

Representação trigonométrica de um número complexo

Seja $A(a,b)$ o afixo de um número complexo $z=a+bi$, **não nulo** e θ um argumento de z



- $\dfrac{a}{|z|}=\cos\theta \Leftrightarrow a=|z|\cos\theta$

- $\dfrac{b}{|z|}=\sin\theta \Leftrightarrow b=|z|\sin\theta$

$$z=a+bi=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta=|z|\underbrace{(\cos\theta+i\sin\theta)}_{e^{i\theta}}=|z|e^{i\theta}$$

Forma trigonométrica de um número complexo

A representação de um número complexo $z \neq 0$ na forma

$$z = \rho e^{i\theta}, \text{ com } \rho = |z|$$

onde θ é um argumento de z, designa-se por **forma trigonométrica ou forma polar de** z

Representar um número complexo $z = a + bi$, $z \neq 0$, na forma trigonométrica consiste em determinar:

- o módulo: $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
- determinar um argumento θ de z usando $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$

Escreva na forma trigonométrica os números complexos seguintes:

1. $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$|z| = \rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ \left(1, \sqrt{3}\right) \in 1^{\circ}Q \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ é um argumento de } z$$

Logo $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. $z = -2 - 2i$

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ (-2,-2) \in 3ºQ \end{cases} \Rightarrow \theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \text{ é um argumento de } z$$

Logo $z = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ ou $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

3. $z = i^6 + i$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ (-1,1) \in 2^{\text{o}}Q \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ é um argumento de } z$$

Logo $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

4. $z = 3 - \sqrt{3}i$

$$\rho = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \tan\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(3, -\sqrt{3}\right) \in 4^{\text{o}}Q \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ é um argumento de } z$$

Logo $z = 2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ ou $z = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$

5. $z = 2$

$$z = 2e^{i\times 0}$$

6. $z = -\sqrt{2}$

$$z = \sqrt{2}e^{i\times\pi}$$

Se $z = \rho e^{i\theta}$ e $z \neq 0$

- z é um número real $\Leftrightarrow \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  - $z \in \mathbb{R}^{+} \Leftrightarrow \theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad z = a \Leftrightarrow z = ae^{i\times 0}$
  - $z \in \mathbb{R}^{-} \Leftrightarrow \theta = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad z = a \Leftrightarrow z = |a|e^{i\times\pi}$

7. $z = 2i$ $\quad$ $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

8. $z = -3i$ $\quad$ $z = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Se $z = \rho e^{i\theta}$ e $z \neq 0$

- z é um número imaginário puro $\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$z = bi \underset{b \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} z = be^{i \times \frac{\pi}{2}}$$

$$z = bi \underset{b \in \mathbb{R}^-}{\Leftrightarrow} z = |b|e^{i \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Escreva na forma algébrica os números complexos seguintes:

1. $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. $z = 2e^{-i\frac{19}{3}\pi}$

$$z = 2e^{-i\frac{19}{3}\pi} = 2\left(\cos\left(-\frac{19}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{19}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= 1 - \sqrt{3}i$$

3. $z = \pi e^{i\pi}$

4. $z = \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{2}}$