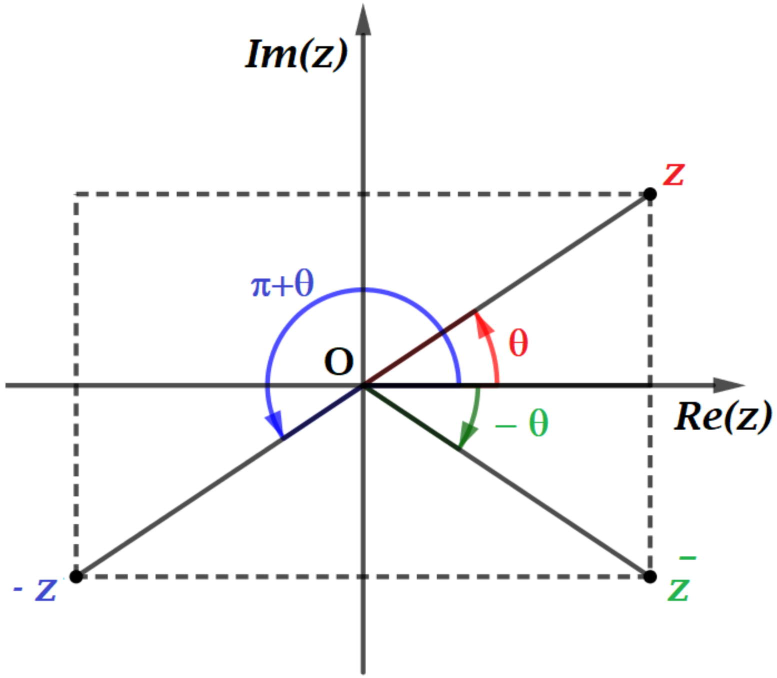
S8 • Números complexos

Conjugado e simétrico na forma trigonométrica

Seja $z = \rho e^{i\theta}$

Conjugado de z : $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$

Os afixos de dois números complexos conjugados são simétricos relativamente ao eixo real.



Simétrico de z : $-z = \rho e^{i(\theta+\pi)}$

Os afixos de dois números complexos simétricos são simétricos em relação à origem do referencial.

Seja Seja z um número complexo de argumento $\frac{5\pi}{4}$.

Os valores de um argumento de $-z$ e de $\overline{z}$ são respetivamente:

(A) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

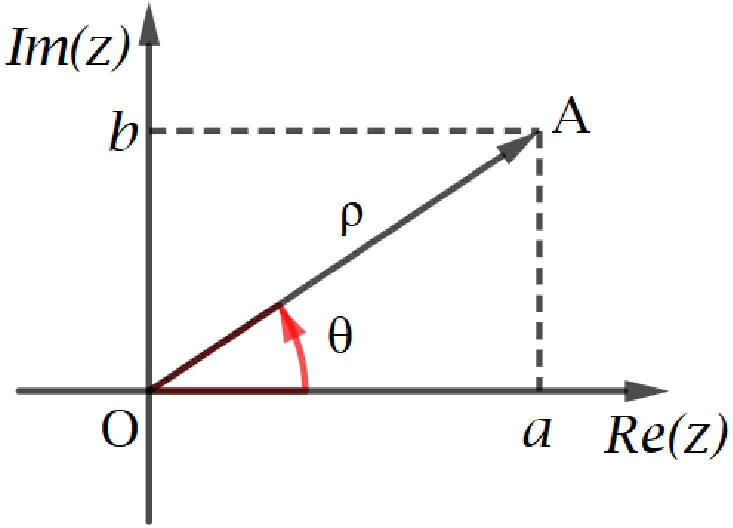
(C) $\frac{3\pi}{4}$ e $-\frac{5\pi}{4}$

(D) $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

Igualdade de números complexos na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

Dois números complexos são iguais se têm o mesmo módulo e os seus argumentos diferem de $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\theta\right)}$ com $\theta \in \mathbb{R}$.

Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{3\pi}{8}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{5\pi}{8}$

Operações com números complexos na forma trigonométrica

Sejam $z = \rho e^{i\theta}$, $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

Multiplicação:

$$z_1 \times z_2 = \left(\rho_1 \times e^{i\theta_1}\right) \times \left(\rho_2 \times e^{i\theta_2}\right) = \left(\rho_1 \times \rho_2\right) \times e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Exemplo:

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}} = (2 \times 3) \times e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Exemplo:

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{3} \times e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Potenciação: (**consta do formulário do exame**)

$$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n \times e^{in\theta}, \;\; n \in \mathbb{N}$$

Obs: Fórmula de De Moivre

$$z = e^{i\theta} \qquad\qquad |z| = \rho = 1 \quad \text{complexo unitário}$$

$$z^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exemplo:

$$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 32e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{\left(\sqrt{3}-2i\right)^2+\left(2e^{i\frac{\pi}{9}}\right)^3}{e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

apresentando o resultado na forma algébrica.

R: $3i$

Seja $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

Seja n um número natural.

Determine $\dfrac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}+2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{2e^{i\frac{\pi}{5}}}$, sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

R: $\dfrac{1}{2}e^{i\left(-\frac{7}{10}\pi\right)}$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \qquad \text{e} \qquad z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$$

Determine o menor valor de n natural para o qual $\left(z_1 \times z_2\right)^n$ é um número real positivo.

R: $n = 15$