S1 • Revisão

Limites notáveis

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty, \quad p\in\mathbb{R}$$

Derivada da função exponencial de base e

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(e^u\right)'=u'e^u$$

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

1.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

$$f(x)=\frac{e^x}{x-1},\ (x\neq 1)$$

1.2. Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

$$f(x)=\frac{e^{x}}{x-1},\ (x\neq 1)$$

1.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f'		n.d.		0	
f		n.d.		mín $f(2)$	

Podemos, assim, concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,1[$ e no intervalo $]1,2]$
- é crescente no intervalo $[2,+\infty[$
- tem um mínimo relativo para $x=2$

2. Calcule os seguintes limites:

2.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x e^{-x} \right)$

2.2. $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{e^{-x}}\right)\overset{\triangle}{=}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{(-y)^2}{e^y}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{y^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{+\infty}=0$$

$\triangle$
Mudança de variável

Fazendo

$y=-x$ vem que $x=-y$

Se $x\to-\infty$ então $y\to+\infty$

2.3. $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$$

2.4. $$\lim_{x\to 0^{+}}\left(xe^{\frac{2}{x}}\right)$$