TELENSINO

MATEMÁTICA A – 10ºANO

Gracinda Santos

Divisibilidade de polinómios

Exercício 1 Considera o polinómio $P(x) = 4x^3 - 8x - 4$.

1.1 Determina o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ e calcula o valor de $P(1)$.

Resolução:

Regra de Ruffini

	4	0	-8	-4
1		4	4	-4
	4	4	-4	-8

Valor que anula o polinómio divisor

$$P(1) = 4 \times 1^3 - 8 \times 1 - 4$$
$$P(1) = 4 - 8 - 4$$
$$P(1) = -8$$

$$R(x) = -8$$

O valor de $P(1)$ é igual ao valor do resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$.

Divisibilidade de polinómios. Teorema do Resto

Exercício 1 Considera o polinómio $\mathrm{P}(x) = 4x^3 - 8x - 4$.

1.2 Determina o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ e calcula o valor de $P(2)$.

Resolução:

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & -8 & -4 \\ 2 & & 8 & 16 & 16 \\ \hline & 4 & 8 & 8 & \boxed{12} \end{array}$$

$$P(2) = 4 \times 2^3 - 8 \times 2 - 4$$

$$P(2) = 4 \times 8 - 16 - 4$$

$$P(2) = 12$$

$$R(x) = 12$$

O valor de $P(2)$ é igual ao valor do resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$.

Teorema do resto

O resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ $(a \in \mathbb{R})$ é $P(a)$.

Divisibilidade de polinómios. Teorema do Resto

Exercício 1 Considera o polinómio $\mathrm{P}(x) = 4x^3 - 8x - 4$.

1.3 Determina o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ e calcula o valor de $P(-1)$.

Resolução:

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & -8 & -4 \\ -1 & & -4 & 4 & 4 \\ \hline & 4 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(-1) = 4 \times (-1)^3 - 8 \times (-1) - 4$$

$$P(-1) = -4 + 8 - 4$$

$$P(-1) = 0$$

$$R(x) = 0$$

O valor de $P(-1)$ é igual ao valor do resto da divisão de $P(x)$ por x +1.

Neste caso, diz-se que:

- ✓ o polinómio $\mathrm{P}(x)$ é divisível por $x + 1$
- ✓ -1 é **zero ou raiz** do polinómio $P(x)$
- ✓ $P(-1) = 0$

Divisibilidade de polinómios. Teorema do Resto

Zero ou raiz de um polinómio

Um número real $\boldsymbol{a}$ diz-se **raiz ou zero** de um polinómio $P(x)$ se $\boldsymbol{P(a) = 0}$.
Por outras palavras, $x = a$ é solução da equação $P(x) = 0$, considerando-se x como variável real.

Corolário é uma consequência imediata de um teorema.

Corolário do Teorema do Resto

Dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in IR$, $\boldsymbol{a}$ é uma **raiz** de $P(x)$ se e só se $\boldsymbol{P(x)}$ **for divisível por** $\boldsymbol{x - a}$.

$$P(x) = (x - a)Q(x) \qquad R(x) = 0$$

Divisibilidade de polinómios. Teorema do Resto

Exercício 2

Resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por um polinómio do tipo $ax - b$, com $a \neq 0$

Determina o resto da divisão do polinómio $P(x) = x^3 - 2x + 1$ por $3x - 6$.

Resolução:

Pelo Teorema do Resto podemos determinar o resto da divisão de $P(x)$ por $3x - 6$ sem efetuar a divisão.

Temos que:

$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$,   2 é o valor que anula o polinómio divisor

Assim,

$P(2) = 2^3 - 2 \times 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$

O resto da divisão de $P(x)$ por $3x - 6$ é 5.

O **resto da divisão** de um polinómio $P(x)$ por um polinómio divisor do tipo $\boldsymbol{ax - b}$**, com** $\boldsymbol{a \neq 0}$ **é igual** $\boldsymbol{P\left(\frac{b}{a}\right)}$.

Divisibilidade de polinómios. Teorema do Resto

Exercício 3 Considera o polinómio $P(x) = x^4 - (k+1)x^2 + 3kx - 2$

Determina o valor de k de modo que:

3.1 o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ seja -2.

3.2 $P(x)$ seja divisível por $x-2$

Resolução:

3.1 $k = ?$ $P(-1) = -2$ (Teorema do Resto)

$$P(-1) = (-1)^4 - (k+1) \times (-1)^2 + 3k \times (-1) - 2$$
$$= 1 - k - 1 - 3k - 2$$
$$= -4k - 2$$

$$-4k - 2 = -2$$
$$\Leftrightarrow -4k = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 0$$

Se $k = 0$ o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é -2

3.2 $k = ?$ $P(x)$ seja divisível por $x-2$

$$P(2) = 0$$

$$P(2) = 2^4 - (k+1) \times 2^2 + 3k \times 2 - 2$$
$$= 16 - 4k - 4 + 6k - 2$$
$$= 2k + 10$$

$$2k + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2k = -10$$
$$\Leftrightarrow k = -5$$

Se $k = -5$ $P(x)$ é divisível por $x-2$.

Multiplicidade da raiz de um polinómio

Exemplo 1 Consideremos o polinómio $\mathrm{P}(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4$.

Vamos mostrar, efetuando a divisão, que $\underbrace{\textbf{−1 é raiz do polinómio } P(x)}$

Regra de Ruffini

	1	3	−1	−11	−12	−4
−1		−1	−2	3	8	4
	1	2	−3	−8	−4	$\boxed{0}$
−1		−1	−1	4	4	
	1	1	−4	−4	$\boxed{0}$	
−1		−1	0	4		
	1	0	−4	$\boxed{0}$		
−1		−1	1			
	1	−1	$\boxed{-3}$ $\neq 0$			

$P(x)$ *é divisível por* $(x + 1)$ → $P(x) = (x + 1)Q(x)$

$$\mathrm{P}(x) = (x + 1)\underbrace{(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4)}$$

-1 é *raiz do polinómio quociente*

$$\mathrm{P}(x) = (x + 1)(x + 1)\underbrace{(x^3 + x^2 - 4x - 4)}$$

-1 *volta a ser raiz deste quociente*

$$\mathrm{P}(x) = (x + 1)(x + 1)(x + 1)\underbrace{(x^2 - 4)}$$

-1 *não* é *raiz deste quociente*

$$\mathrm{P}(x) = (x + 1)^3\,(x^2 - 4)$$

$P(x)$ é divisível por $(x + 1)^3$ então diz-se que **−1 é raiz de multiplicidade 3** do polinómio $\mathrm{P}(x)$

Multiplicidade da raiz de um polinómio

Seja $P(x)$ um polinómio e $\boldsymbol{a}$ **uma raiz de** $\boldsymbol{P(x)}$**.**

A **multiplicidade de** $\boldsymbol{a}$ é o maior número natural $\boldsymbol{n}$ para o qual $P(x)$ é divisível por $(x-a)^n$, ou seja, para o qual se tem:

$$\boldsymbol{P(x) = (x-a)^n Q(x)}$$

Em que $Q(x)$ não é divisível por $x-a$, ou seja, $Q(a) \neq 0$.

Uma raiz $\boldsymbol{a}$ diz-se simples, dupla, tripla, quádrupla, … , quando n é igual a 1, a 2, a 3, a 4, …, respetivamente.

Multiplicidade 4
Zero quádruplo

Multiplicidade 3
Zero triplo

Multiplicidade 2
Zero duplo

Multiplicidade 1
Zero simples

Número de raízes (ou zeros) de um polinómio

Considerando o polinómio $\mathrm{P}(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4$.

Quantas raízes (ou zeros) tem este polinómio?

Regra de Ruffini

	1	3	-1	-11	-12	-4
-1		-1	-2	3	8	4
	1	2	-3	-8	-4	0
-1		-1	-1	4	4	
	1	1	-4	-4	0	
-1		-1	0	4		
	1	0	-4	0		
-1		-1	1			
	1	-1	$-3 \neq 0$			

$\mathrm{P}(x) = (x+1)^3\,(x^2-4)$

Apesar de -1 não ser raiz de $x^2 - 4$, este polinómio admite outras raízes.

Repara que: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Então, -2 e 2 são raízes (ou zeros) de $x^2 - 4$

Logo, $x^2 - 4$ é divisível por $x - 2$ e por $x + 2$

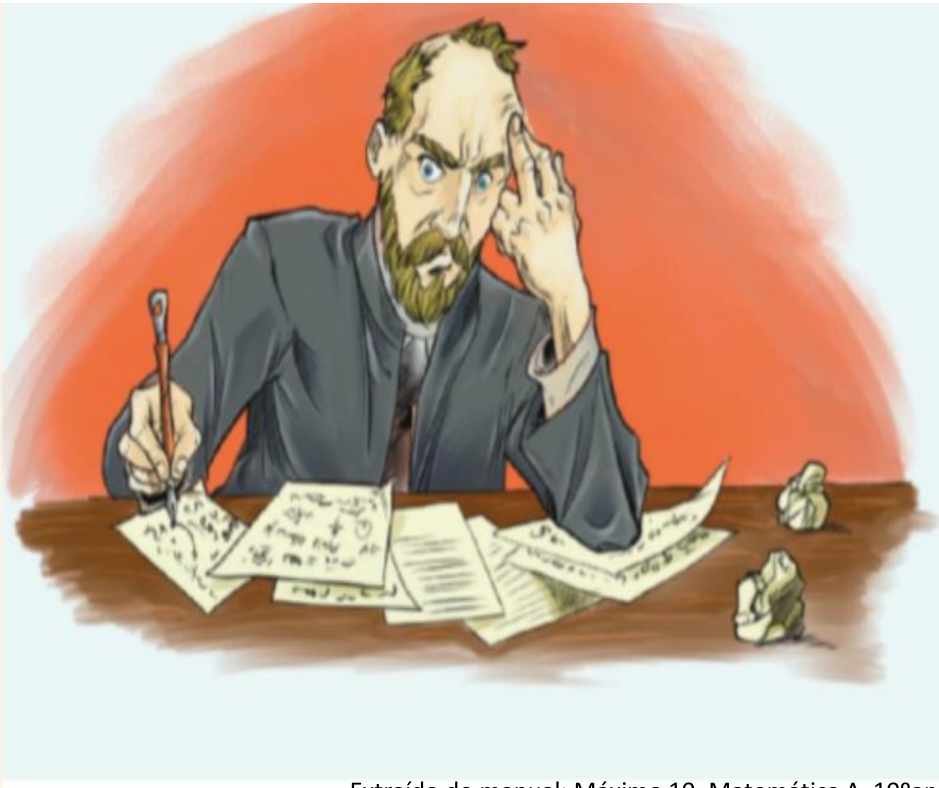
Assim, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$P(x) = (x+1)^3(x-2)(x+2)$

Concluímos que o polinómio $P(x)$ tem 3 zeros distintos:

- -1 com multiplicidade 3 (-1 é um zero triplo);
- -2 e 2 que são raízes ou zeros simples.

Número de raízes (ou zeros) de um polinómio



Uma questão que ocupou os matemáticos até ao início do século XIX foi a seguinte:

"Quantos zeros pode ter um polinómio?"

A resposta foi dada com o seguinte teorema:

Teorema Fundamental da Álgebra

Todo o polinómio $P(x)$ com coeficientes reais pode ser representado como produto do coeficiente do termo de maior grau por binómios do primeiro grau do tipo $x - x_i$ (em que x_i toma os valores dos zeros reais do polinómio) e polinómios do segundo grau do tipo $x^2 + ax + b$ sem zeros reais.

Extraído do manual: Máximo 10, Matemática A, 10ºano, Maria Augusta Neves, Luís Guerreiro, António Pinto Silva, Porto Editora

Um polinómio de grau n, tem no máximo n raízes reais.

$\mathrm{P}(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4$

Zeros do polinómio: -2; 2 e -1 (zero triplo)

Coeficiente do termo de maior grau de $\mathrm{P}(x)$: 1

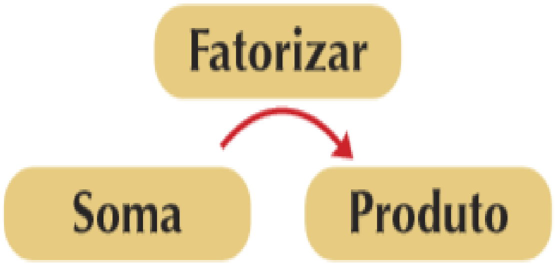
$$P(x) = 1(x-1)(x-1)(x-1)\,(x-2)(x+2)$$

Coeficiente de x^5, termo de maior grau.

Raízes ou zeros do polinómio

Fatorização ou decomposição de polinómios

$$\mathrm{P}(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4$$



$$\mathrm{P}(x) = (x+1)^3\,(x^2-4)$$

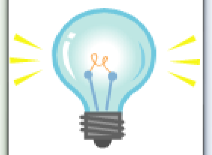
$$P(x) = 1(x-1)(x-1)(x-1)\,(x-2)(x+2)$$

Fatorizar (ou decompor) **um polinómio** significa escrevê-lo num produto de polinómios sendo, pelo menos, um dos fatores não constante e de grau inferior ao polinómio inicial.

Se $P(x)$ é um polinómio de grau n , com n raízes reais distintas, a_1, a_2, … , a_n , $P(x)$ pode ser fatorizado da seguinte forma:

$$P(x) = a(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

em que a é o coeficiente do termo de maior grau.



Conceito matemático de grande utilidade, nomeadamente na resolução de equações e inequações polinomiais de grau superior ao segundo.

Exercício 3 Considera o polinómio $\mathrm{P}(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

3.1 Sabendo que 1 é uma raiz de $P(x)$, determina a multiplicidade desta raiz.

3.2 Decompõe $P(x)$ em fatores do primeiro grau.

Resolução:

Agora é a tua vez!

"Na sala de aula, todos ensinam, todos aprendem."

Em casa, também, poderá ser igual!

Estuda com Autonomia!