



TELENSINO



MATEMÁTICA A – 10ºANO

Gracinda Santos

Função Módulo

Exercício 1- Aula nº6

Considera a função g definida por $g(x) = -|x + 2| + 3$.

1.2 Determina, para que valores de x , $g(x) \geq 2$?



Resolução: $g(x) \geq 2$

$$\Leftrightarrow -|x + 2| + 3 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow -|x + 2| \geq 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow -|x + 2| \geq -1$$

$$\Leftrightarrow |x + 2| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x + 2 \leq 1 \wedge x + 2 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 - 2 \wedge x \geq -1 - 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \wedge x \geq -3$$

$$g(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [-3, -1]$$

$Se a > 0$ 

$$\checkmark |x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$$

Função Módulo

Exercício 1

Considera as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = |1 - 2x| \quad \text{e} \quad g(x) = |x - 3|$$

1.1 Determina para que valores de x se tem $f(x) = g(x)$.



Resolução:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |1 - 2x| = |x - 3| \quad \longrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x = x - 3 \vee 1 - 2x = -(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow -2x - x = -3 - 1 \vee 1 - 2x = -x + 3$$

$$\Leftrightarrow -3x = -4 \vee -2x + x = 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -2$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \left\{-2, \frac{4}{3}\right\}$$



Dois números reais a e b têm o mesmo valor absoluto se e só se são iguais ou simétricos.

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

Dois números reais a e b não negativos.

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Função Módulo

Exercício 1

Considera as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = |1 - 2x| \quad \text{e} \quad g(x) = |x - 3|$$

1.2 Determina para que valores de x se tem $f(x) > g(x)$.



Resolução:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow |1 - 2x| > |x - 3| \quad \longrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2x)^2 > (x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 > x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x^2 - 4x + 6x + 1 - 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup \left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$$

Dois números reais a e b não negativos.

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

$$|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$$



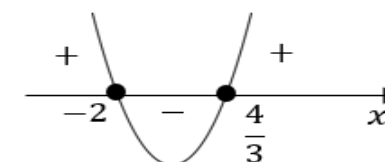
C.A. (cálculo auxiliar)

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -2$$

Esboço do gráfico



Função Módulo

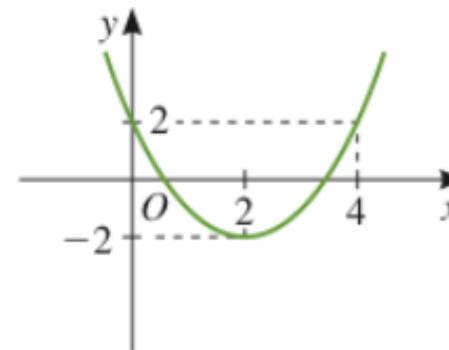
Exercício 2

Manual: Dimensões Matemática A 10ºAno, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Martins, Editora Santillana

Considera a função quadrática f representada graficamente na figura.

Sabe-se que o gráfico de f tem vértice $V(2, -2)$ e $f(4) = f(0) = 2$.

Representa graficamente as funções $|f(x)|$ e $f(|x|)$.

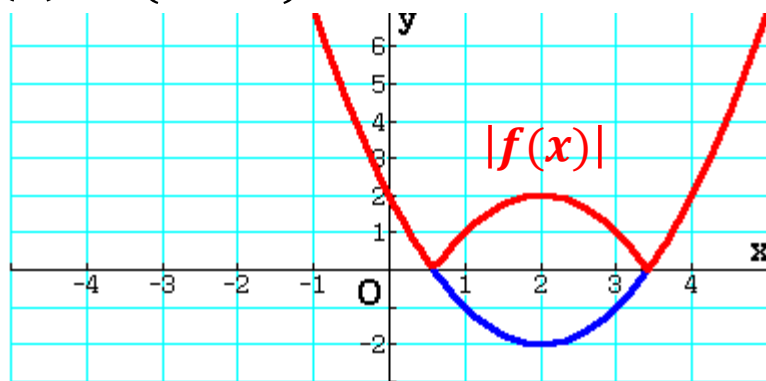


Resolução:

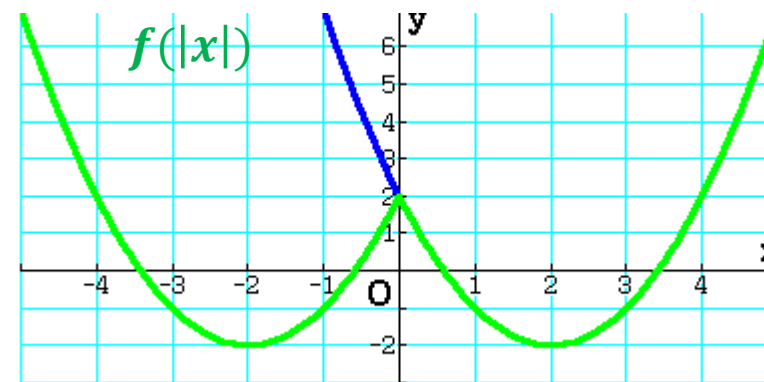
Como $V(2, -2)$ então $f(x) = a(x - 2)^2 - 2$

Substituindo o ponto $(0, 2)$ em $y = a(x - 2)^2 - 2$, vem que: $2 = a(0 - 2)^2 - 2 \Leftrightarrow a = 1$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 2$$



Graph Func :Y=
 Y1=(x-2)^2-2 [—]
 Y2=|Y1| [—]
 Y3=Y1(|x|) [—]
 Y4: [—]
 Y5: [—]
 Y6: [—]
 SELECT DELETE TYPE TOOL MODIFY DRAW



O gráfico da função $|f(x)|$ obtém-se a partir do gráfico da função f mantendo os pontos de ordenada positiva ou nula e transformando os pontos de ordenadas negativa pela reflexão de eixo Ox .

O gráfico da função definida por $f(|x|)$ tem uma simetria de reflexão de eixo Oy e coincide com o gráfico de f à direita do eixo Oy .

Funções Polinomiais

Designa-se por **função polinomial** qualquer função, real de variável real, que pode ser definida analiticamente por um **polinómio com uma só variável**.

Polinómio na variável x

Um **polinómio na variável x** , $P(x)$ é um monómio ou uma expressão ligando monómios (os termos do polinómio) através do sinal de adição. Qualquer polinómio não nulo pode ser reduzido, de forma única, a uma expressão do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$
coeficientes dos termos do polinómio

- a_0 diz-se o **termo independente**
- n diz-se o **grau do polinómio**

Um **monómio** numa variável x é um número real ou o produto de um número real por uma potência de base x e expoente natural.

Exemplo: $x^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

Exemplo: Sendo $P(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x + 3$

- $n = 3$ (é um polinómio do terceiro grau)
- $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{5}{2}$ e $a_0 = 3$
- 3 é o termo independente.

Funções Polinomiais



Assim, uma **função polinomial** f é uma função de domínio IR do tipo:

$$f(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 ,$$

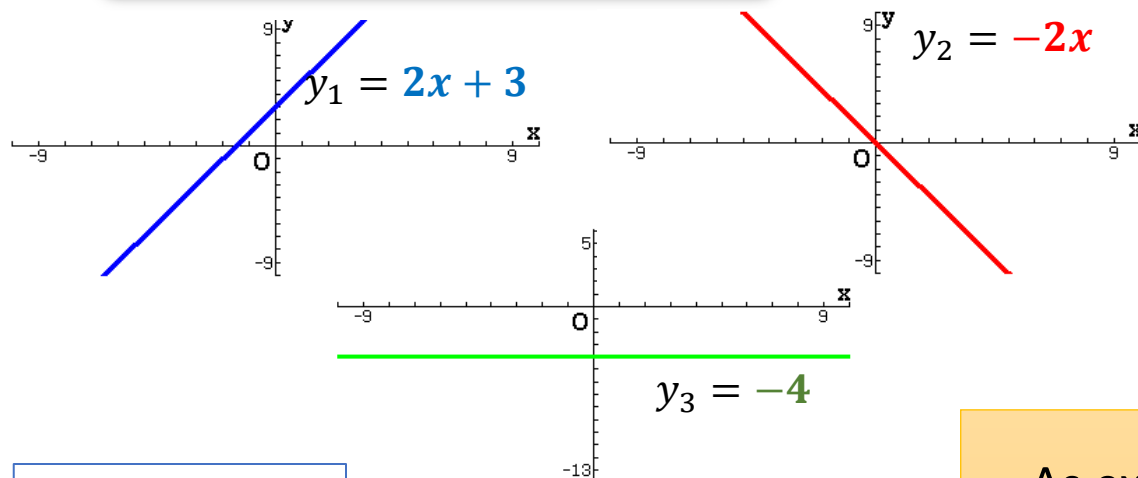
com $n \in \mathbb{N}_0$; $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots , a_1 , a_0 \in \mathbb{R}$

Funções Polinomiais

Exemplos de funções polinomiais

Funções afins

($y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$)



Polinómios
de grau 1

Polinómio
de grau 0

$$2x + 3$$

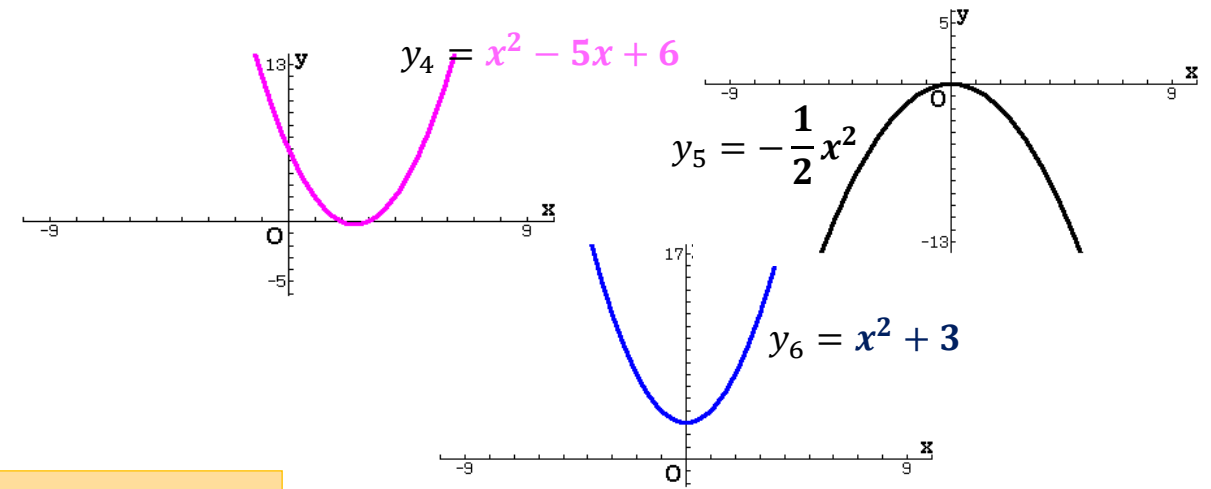
$$-2x$$

$$-4$$

As expressões das
funções afins e das
funções quadráticas
são polinómios.

Funções quadráticas

($y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$)



$$x^2 - 5x + 6$$
$$-\frac{1}{2}x^2$$
$$x^2 + 3$$

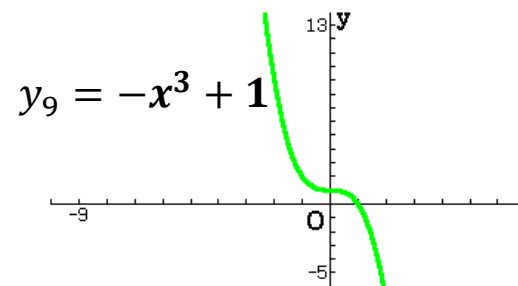
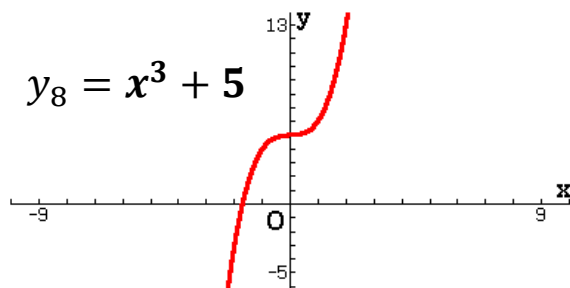
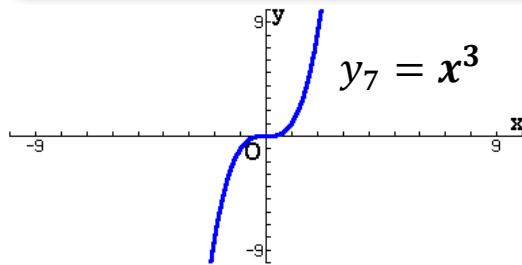
Polinómios de grau 2

Funções Polinomiais

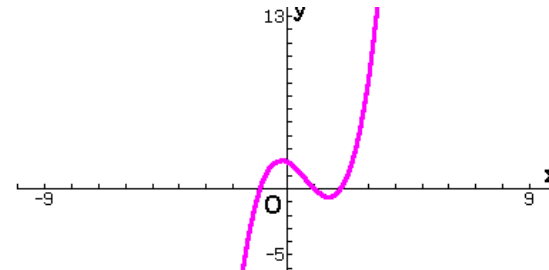
Exemplos de funções polinomiais

Funções polinomiais de grau 3 (Funções cúbicas)

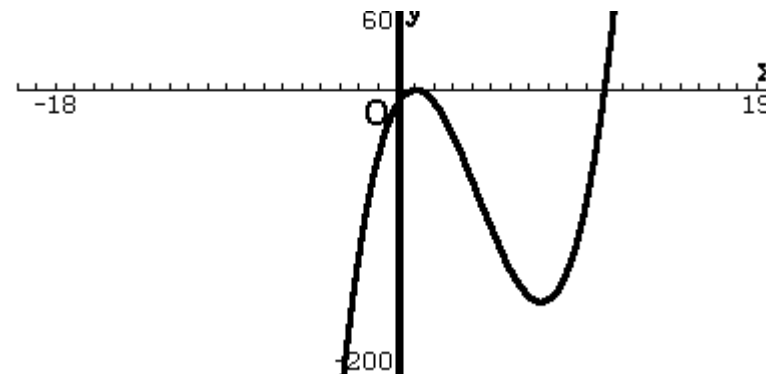
São funções do tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$.



$$y_{10} = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

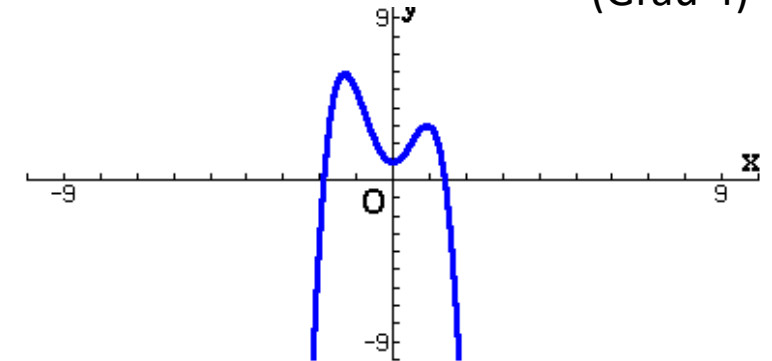


$$y_{11} = x^3 - 13x^2 + 23x - 11$$

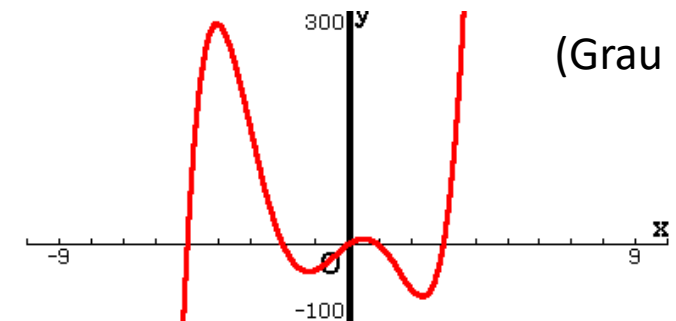


Funções polinomiais de grau superior a 3.

$$y_{12} = -2x^4 - x^3 + 5x^2 + 1 \quad (\text{Grau 4})$$



$$y_{13} = x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 19x^2 + 30x \quad (\text{Grau 5})$$



Polinómios



Polinómios

- ❑ **Reduzir um polinómio** é escrevê-lo de forma que não apareçam termos semelhantes.
- ❑ O **grau de um polinómio** (depois de reduzidos os seus termos semelhantes) é o maior dos graus dos seus termos não nulos.
- ❑ **Ordenar um polinómio** é escrevê-lo segundo as potências crescentes ou decrescentes da variável.
- ❑ Um polinómio cuja forma reduzida seja zero chama-se **polinómio nulo** e o seu **grau é indeterminado**.
- ❑ Um **polinómio** diz-se **completo** se a respetiva forma reduzida não tiver termos nulos. Caso contrário, diz-se polinómio incompleto.
- ❑ A forma reduzida de um polinómio completo de grau n tem $n + 1$ termos.
- ❑ Dois **polinómios**, na forma reduzida, são **iguais** se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais.

Exemplos de Polinómios

$$2x + 3$$

$$-2x$$

$$x^2 - 5x + 6$$

$$-4$$

$$-\frac{1}{2}x^2$$

$$x^2 + 3$$

$$x^3$$

$$-x^3 + 1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$x^3 + 5$$

$$x^3 - 13x^2 + 23x - 11$$

$$-2x^4 - x^3 + 5x^2 + 1$$

$$x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 19x^2 + 30x$$

Operações com polinómios



Adição, subtração e multiplicação de polinómios

Exemplo 1 Sejam A e B dois polinómios na variável x tais que: $A(x) = 2x^3 - x + 3$ e $B(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 2$.

□ Adição de polinómios:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= 2x^3 - x + 3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x - 2 \\ &= 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1 \rightarrow \text{grau } 3 \end{aligned}$$

□ Subtração de polinómios:

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= 2x^3 - x + 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x - 2\right) \\ &= 2x^3 - x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2 \\ &= 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5 \rightarrow \text{grau } 3 \end{aligned}$$



Sendo $A(x)$ e $B(x)$ polinómios não nulos:

❖ O grau do polinómio soma $A(x) + B(x)$ é menor ou igual ao maior dos graus de $A(x)$ ou de $B(x)$.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 0x^2 - x + 3 \\ + 0x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x - 2 \\ \hline 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 0x^2 - x + 3 \\ - 0x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2 \\ \hline 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5 \end{array}$$

Operações com polinómios



Adição, subtração e multiplicação de polinómios

❑ Multiplicação de polinómios:

$$\begin{aligned}
 A(x) \times B(x) &= (2x^3 - x + 3) \times \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x - 2\right) \\
 &= x^5 + 10x^4 - 4x^3 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + 15x - 6 \\
 &= x^5 + 10x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 17x - 6 \rightarrow \text{grau 5}
 \end{aligned}$$



Sendo $A(x)$ e $B(x)$ polinómios não nulos:

❖ O grau do polinómio produto $A(x) \times B(x)$ é igual a soma dos graus de $A(x)$ e $B(x)$.

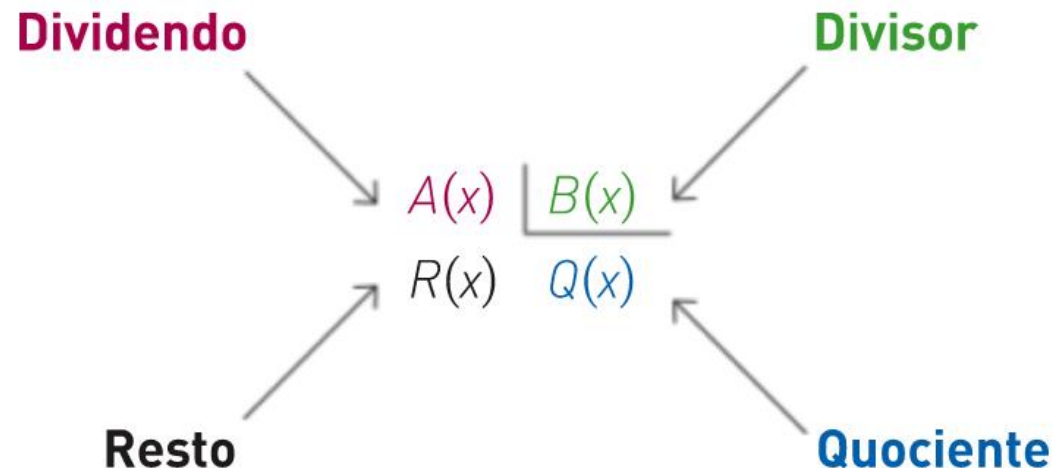
$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 0x^2 - x + 3 \\
 \times \quad \frac{1}{2}x^2 + 5x - 2 \\
 \hline
 -4x^3 + 0x^2 + 2x - 6 \\
 10x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 15x \\
 x^5 + 0x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \\
 \hline
 x^5 + 10x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 17x - 6
 \end{array}$$

Operações com polinómios

Divisão inteira de polinómios

Efetuar a divisão inteira (ou divisão euclidiana) de um polinómio $A(x)$ por um polinómio, não nulo, $B(x)$ é determinar o polinómio quociente $Q(x)$ e o polinómio resto $R(x)$, tais que:

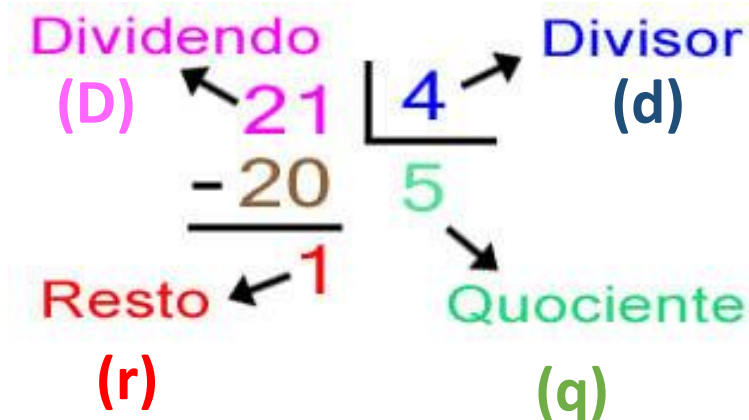
$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$



Prova-se que os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ nestas circunstâncias são únicos.



O algoritmo da divisão



$$D = d \times q + r$$

$$21 = 4 \times 5 + 1$$

Operações com polinómios



Dividendo $\swarrow$ 21 $\searrow$ Divisor 4
 $\swarrow$ 20 $\searrow$ 5
 Resto $\swarrow$ 1 $\searrow$ Quociente

$$D = d \times q + r$$

$$A(x) \overline{) B(x)}$$

$$R(x) \quad Q(x)$$

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

Divisão inteira de polinómios

Exemplo 2 Sejam $A(x) = x^3 + x^2 + 1$ e $B(x) = x^2 + 2$.

Utilizando o algoritmo da divisão, vamos determinar o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.



$$(x^3 + x^2 + 0x + 1) - (x^3 + 2x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 0x + 1 \quad \overline{) x^2 + 2} \\ -x^3 - 2x \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ -x^2 - 2 \\ \hline -2x - 1 \end{array}$$

C.A

$$x^3 : x^2 = x$$

$$x(x^2 + 2) = x^3 + 2x$$

$$x^2 : x^2 = 1$$

$$1 \times (x^2 + 2) = x^2 + 2$$

$$Q(x) = x + 1 \quad R(x) = -2x - 1$$

$$A(x) = (x^2 + 2)(x + 1) + (-2x - 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 + 1$$

Polinómio-dividendo

Polinómio-divisor

Polinómio-quociente

Polinómio-resto



$$x^n : x^m = x^{n-m} \quad (n, m \in \mathbb{N}_0)$$

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \quad (n, m \in \mathbb{N}_0)$$

$$x^0 = 1$$

Operações com polinómios

Passos a seguir na **divisão inteira de polinómios**:



1ºPasso:

Ordenar os polinómios, dividendo e divisor, por ordem decrescente das potências de x e, no caso do polinómio dividendo ser incompleto, escrever os seus termos nulos;

2ºPasso:

Dividir o termo de maior grau do polinómio dividendo pelo termo de maior grau do polinómio divisor, obtendo, assim, o primeiro termo do polinómio quociente;

3ºPasso:

Multiplicar o termo do quociente, obtido no passo anterior, pelo polinómio divisor e subtrair este resultado ao polinómio dividendo, obtendo, desta forma, o 1ºresto parcelar;

4ºPasso:

Dividir o termo de maior grau do 1ºresto parcelar pelo termo de maior grau do polinómio divisor, obtendo, assim, o segundo termo do polinómio quociente;

5ºPasso:

Multiplicar o termo do quociente, obtido no passo anterior, pelo polinómio divisor e subtrair este resultado ao dividendo, obtendo, desta forma, o 2ºresto parcelar;

6ºPasso:

Repetir o processo até obter um polinómio resto de grau inferior ao grau do polinómio divisor.



E, assim, termina a divisão!

**“NINGUÉM É TÃO
GRANDE QUE NÃO
POSSA APRENDER,**

nem tão pequeno
que não possa
ensinar.”

ESOPO

Estuda com Autonomia!

***“Na sala de aula, todos ensinam, todos aprendem.”
Em casa, também, poderá ser igual!***

