Proposta de trabalho – 2

Para construir uma caixa com tampa, como a da figura, foi utilizada uma folha de cartão com a forma de um retângulo com 1,2 metros de comprimento e 0,8 metros de largura. (Fig. 1)

Foram retirados quatro quadrados de lado X centímetros e dois retângulos, como mostra a planificação (Fig. 2).

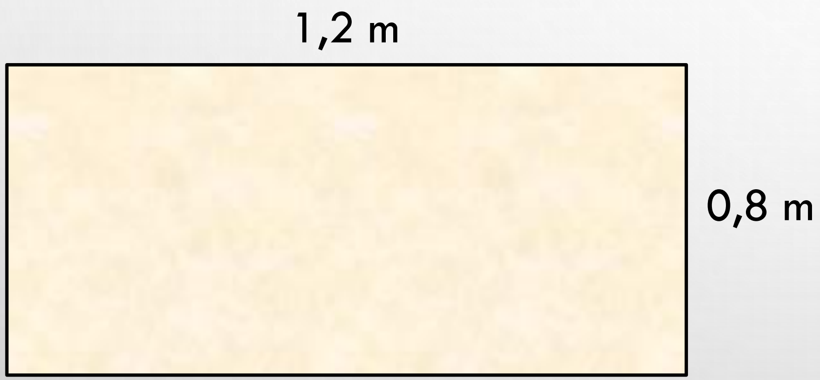


Fig. 1

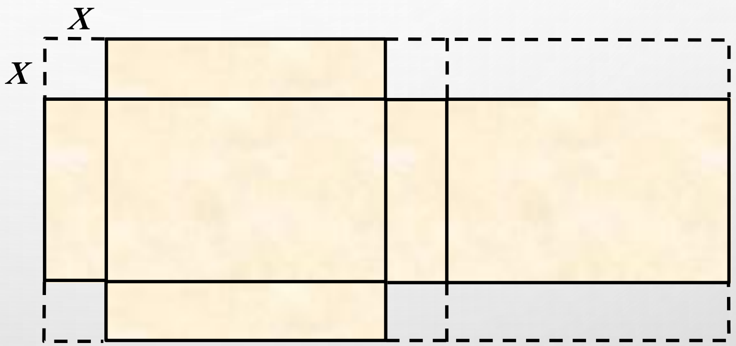


Fig. 2

Seja V a função que a cada valor de X, em centímetros faz corresponder o volume em centímetros cúbicos da caixa.

a) Determine, justificando, o domínio da função V no contexto do problema.

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 2 Resolução

Telensino

Analiticamente, temos que garantir que todos os comprimentos são positivos.

$$60 - x > 0 \quad \wedge \quad 80 - 2x > 0 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x > -60 \quad \wedge \quad -2x > -80 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x < 60 \quad \wedge \quad x < 40 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x < 40$$

R: $D = \left]0,\ 40\right[$

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 2

b) Representa na forma de um polinómio reduzido, a expressão analítica de V.

$$V(x) = \underbrace{(60 - x)(80 - 2x)}_{\text{Área da base}} \underbrace{x}_{\text{Altura}}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (4800 - 120x - 80x + 2x^2)\,x$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (4800 - 200x + 2x^2)\,x$$

$$\Leftrightarrow V(x) = 2x^3 - 200x^2 + 4800x$$

Função cúbica (grau 3)

Telensino

Matemática B
11.º ano

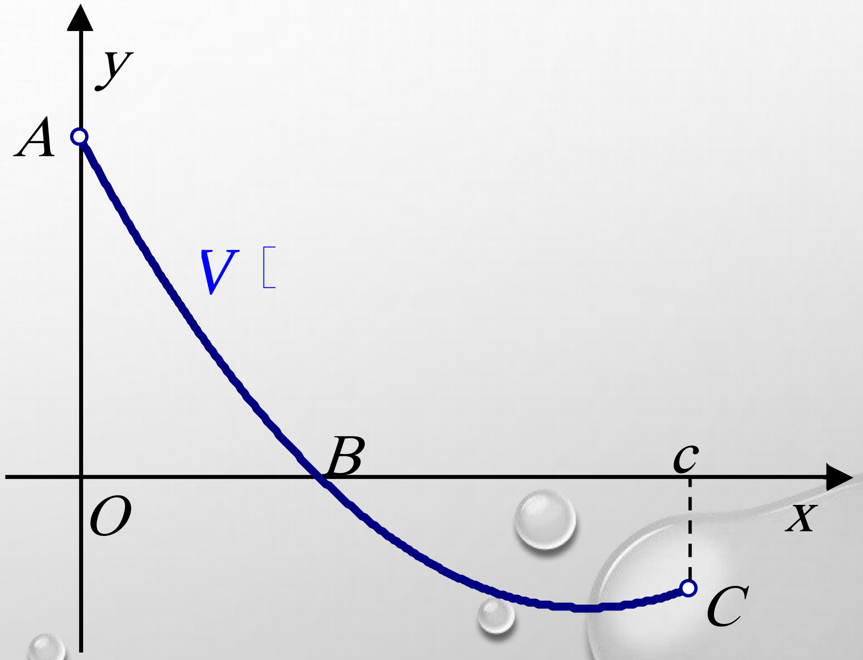
Proposta de trabalho – 2

c) No referencial da figura está representada a função V', função derivada da função V, em que o domínio é um intervalo do tipo $]0, c[$.

A abcissa do ponto B, assinalado na figura, é um zero da função.

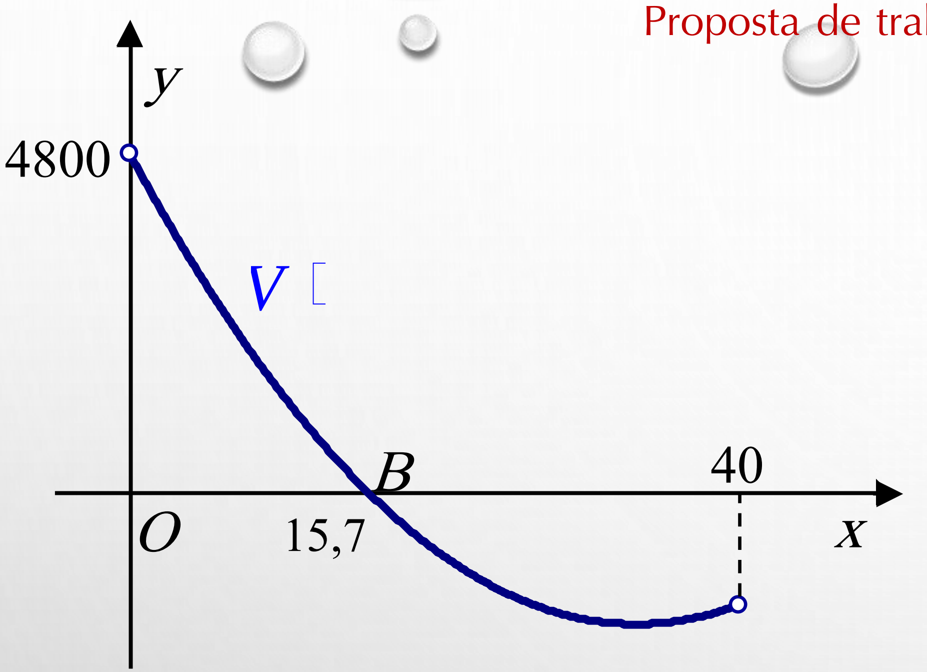
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o seu valor arredondado às décimas.

Justifique analiticamente o significado deste valor no contexto apresentado.



Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 2 Resolução



x	0		15,7		40
V'		+	0	−	
V		↗	V(15,7)	↘	

$$V(15,7) = 2 \times 15,7^3 - 200 \times 15,7^2 - 4800 \times 15,7 \approx 33801,8\ cm^3$$

Quando o valor de X for aproximadamente igual a $15{,}7\ cm$ (comprimento do lado do quadrado a retirar), o volume da caixa é **máximo**, sendo esse valor, aproximadamente $33801,8\ cm^3$

Matemática B
11.º ano

Método gráfico e analítico da resolução de problemas de Programação Linear

Telensino

Tal como na resolução de problemas tradicionais, aqui também é conveniente haver uma série de procedimentos sequenciais, como:

1.º Começar por analisar cuidadosamente os dados;

2.º Definir as variáveis de decisão;

3.º Estabelecer a função objetivo;

4.º Discriminar as restrições a que estão sujeitas as variáveis;

5.º Representar graficamente o sistema de condições;

6.º Identificar a região admissível;

7.º Determinar a solução ótima, recorrendo ao método analítico ou gráfico.

Matemática B
11.º ano

Método gráfico e analítico da resolução de problemas de Programação Linear

Teorema

Seja S a região admissível para um problema de programação linear e seja $z = ax + by$ a função objetivo.

Se S é limitada por um polígono convexo, então Z tem máximo ou mínimo em S e cada um destes ocorre em pelo menos um dos seus vértices.

Se S é não limitada, então o valor máximo ou mínimo de Z pode não existir, contudo, se existir, então ocorre num vértice de S.

Proposta de trabalho – 1

Uma loja de artigos de desporto para criança, tem em stock

60 fatos de treino e 52 pares de sapatilhas que pretende

por à venda numa campanha de saldos.

Para o efeito, está prevista a constituição de dois tipos de lotes:

- **Lote A:** *1 fato de treino e 2 pares de sapatilhas que custa 40 euros;*
- **Lote B:** *3 fatos de treino e 2 pares de sapatilhas que custa 60 euros.*

Quantos lotes de cada tipo, o dono da loja deve formar para que a **receita** a realizar na venda seja **máxima**?

Telensino

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 1 Resolução

Telensino

x : "n.º de lotes do tipo A" (1 fato de treino + 2 pares de sapatilhas)

y : "n.º de lotes do tipo B" (3 fatos de treino + 2 pares de sapatilhas)

- Custo de um lote do tipo A: 40 €
- Custo de um lote do tipo B: 60 €

	N.º de lotes	N.º de fatos de treino	N.º de pares de sapatilhas
A	x	$1x$	$2x$
B	y	$3y$	$2y$
Total		$x+3y$	$2x+2y$

Função objetivo $L(x, y) = 40x + 60y$

Restrições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 60 \\ 2x + 2y \leq 52 \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 1 Resolução

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 60 \\ 2x + 2y \leq 52 \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3y \leq -x + 60 \\ 2y \leq -2x + 52 \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \dfrac{3y}{3} \leq \dfrac{-x}{3} + \dfrac{60}{3} \\ \dfrac{2y}{2} \leq \dfrac{-2x}{2} + \dfrac{52}{2} \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{1}{3}x + 20 \\ y \leq -x + 26 \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Telensino

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{3}x + 20 \\ y \leq -x + 26 \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

C. A.

Determinar coordenadas de dois pontos da reta

$$y = -\frac{x}{3} + 20$$

- Se $y = 0$; $0 = -\frac{x}{3} + 20 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 20 \Leftrightarrow x = 60$

$(60, 0)$

- Se $x = 0$; $y = -\frac{0}{3} + 20 \Leftrightarrow y = 20$

$(0, 20)$

Telensino

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{3}x + 20 \\ y \leq -x + 26 \\ x, y \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

C. A.

Determinar coordenadas de dois pontos da reta

$$y = -x + 26$$

- Se $y = 0$; $0 = -x + 26 \Leftrightarrow x = 26$

$(26, 0)$

- Se $x = 0$; $y = -0 + 26 \Leftrightarrow y = 26$

$(0, 26)$

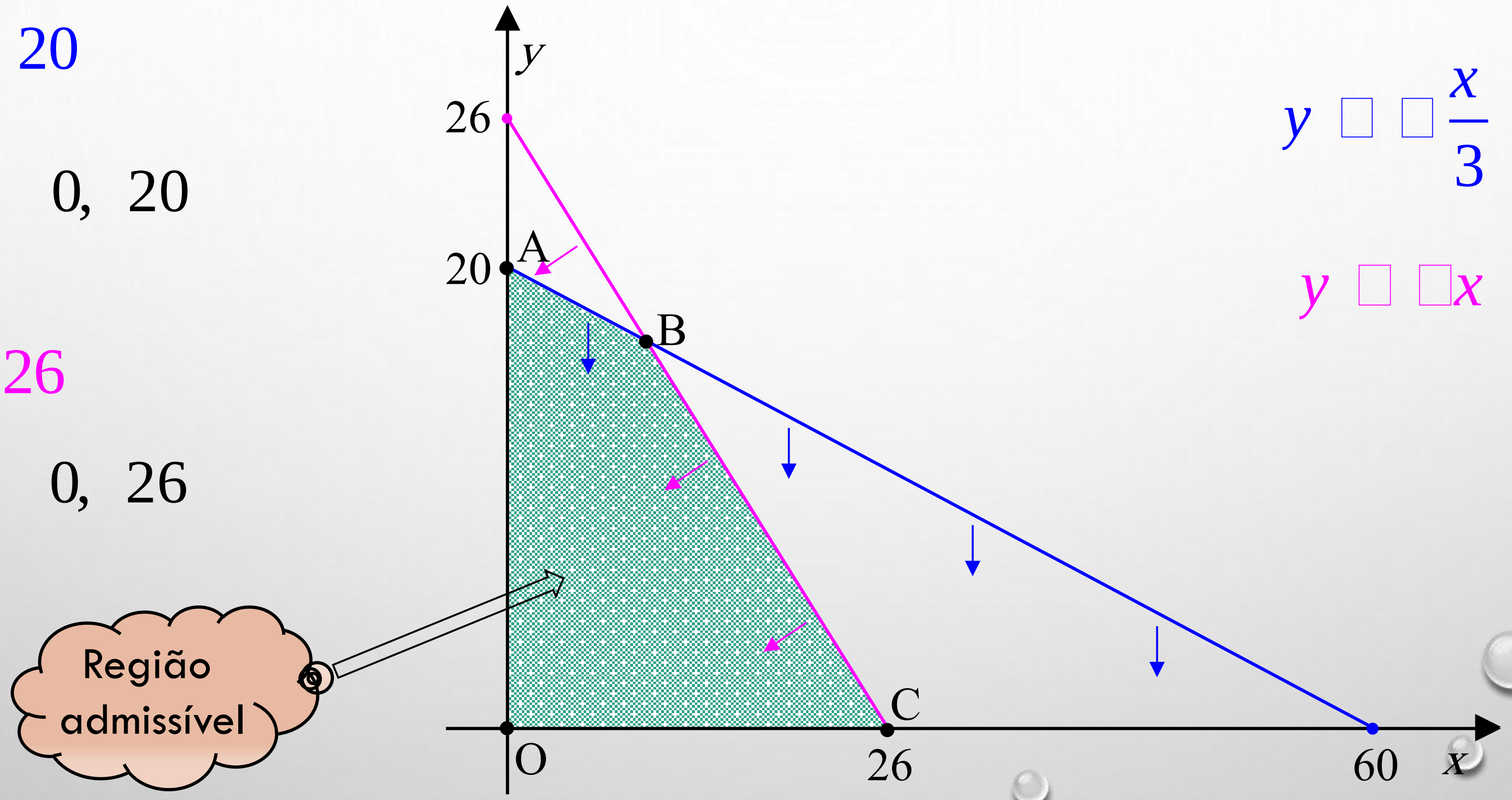
Telensino

$y \leq -\frac{x}{3} + 20$

$60,\ 0$ e $0,\ 20$

$y \leq -x + 26$

$26,\ 0$ e $0,\ 26$



$y \leq -\frac{x}{3} + 20$

$y \leq -x + 26$

Proposta de trabalho – 1 Resolução

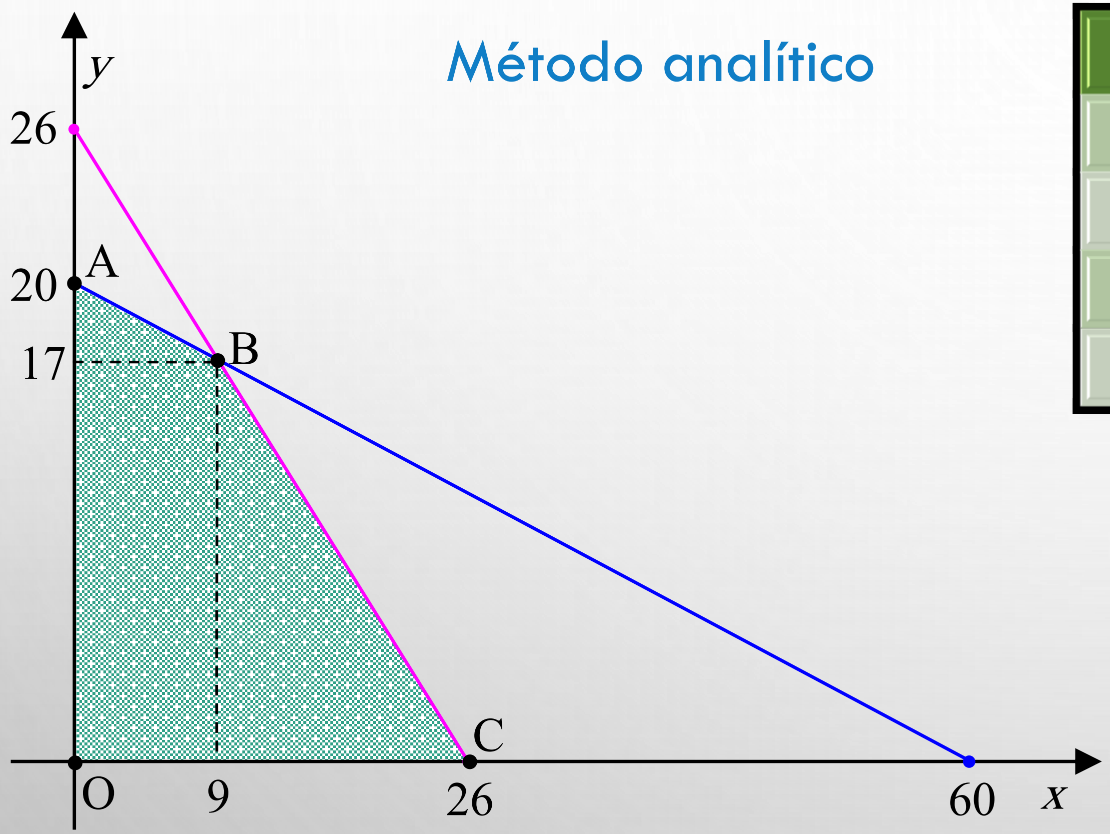
Coordenadas do ponto B

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{3} + 20 \\ y = -x + 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underset{(3)}{-x} + \underset{(3)}{26} = -\dfrac{x}{3} + \underset{(3)}{20} \\ y = -x + 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 78 = -x + 60 \\ y = -x + 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -18 \\ y = -x + 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -9 + 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 17 \end{cases} \qquad B\,(9,\ 17)$$

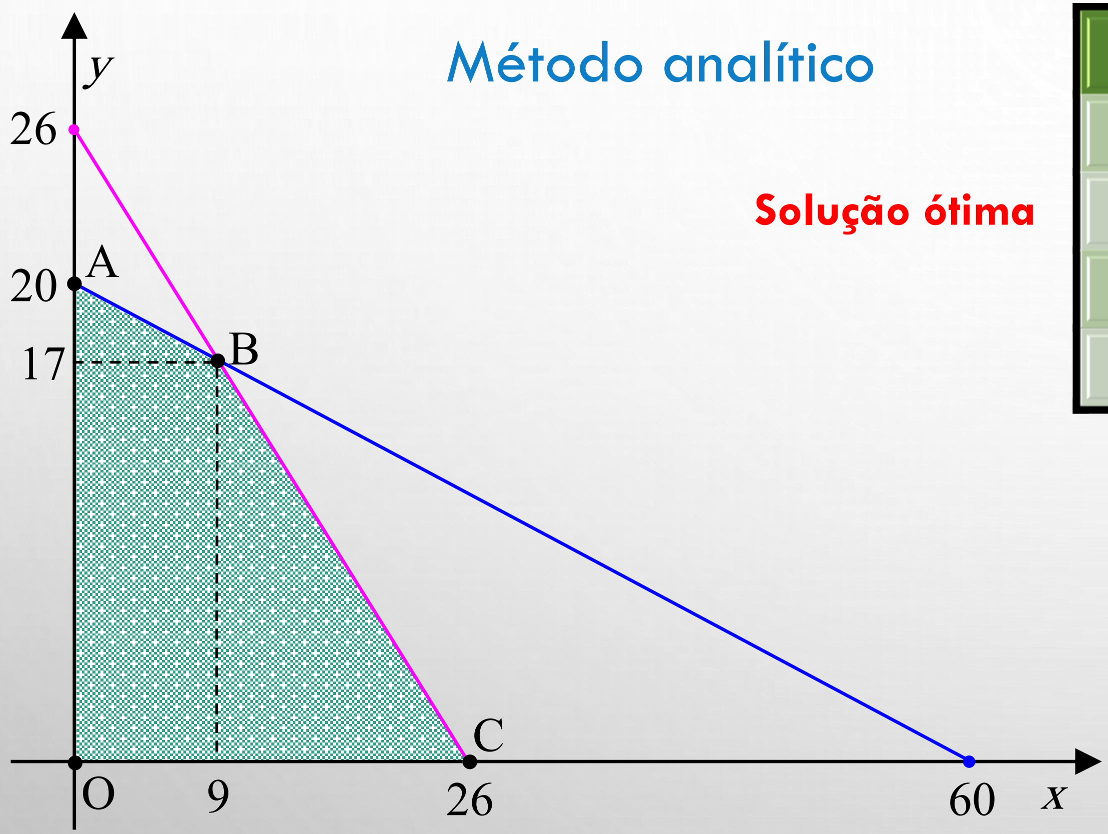
Método analítico



(x, y)	$L(x, y) = 40x + 60y$
A(0, 20)	L(A)=40×0+60×20=1.200
B(9, 17)	L(B)=40×9+60×17=1.380
C(26, 0)	L(C)=40×26+60×0=1.040
O(0, 0)	L(O)=40×0+60×0=0

Proposta de trabalho – 1 Resolução

Método analítico



Solução ótima

(x, y)	$L(x, y) = 40x + 60y$
A(0, 20)	L(A)=40×0+60×20=1.200
B(9, 17)	L(B)=40×9+60×17=1.380
C(26, 0)	L(C)=40×26+60×0=1.040
O(0, 0)	L(O)=40×0+60×0=0

Valor máximo

Para obter a receita máxima, o dono da loja deve formar 9 lotes do tipo A e 17 lotes do tipo B, obtendo uma receita de 1.380 euros.

Telensino

Método gráfico

A receita máxima será obtida para um ponto da reta de equação $L(x, y) = 40x + 60y$ *(função objetivo)*, que satisfaça as seguintes condições:

- *tenha um ponto em comum com a região admissível;*
- *que a "receita"* $L(x, y)$ *seja a maior possível.*

Para determinar o ponto que satisfaz estas condições desenham-se retas todas paralelas à reta que representa a função objetivo.

Estas retas chamam-se ***retas de nível***.

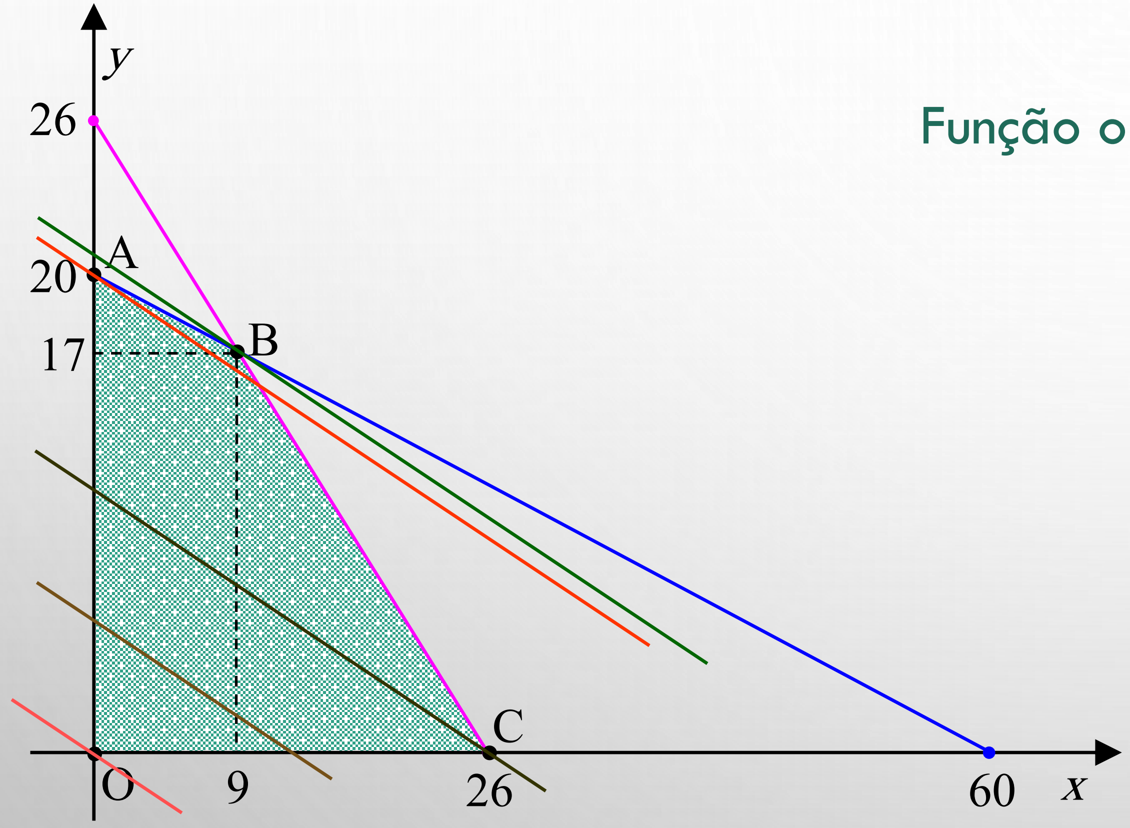
Podemos começar por traçar a reta de nível zero $y = -\frac{2}{3}x$ que se obtém quando $L(x, y) = 0$.

Como tal, a solução ótima deverá pertencer a uma **reta paralela** à reta de nível zero, quando $L(x, y)$ for o **maior** possível.

Proposta de trabalho – 1 Resolução

Telensino

Retas de nível



Função objetivo $\mathrm{L}(x, y) = 40x + 60y$

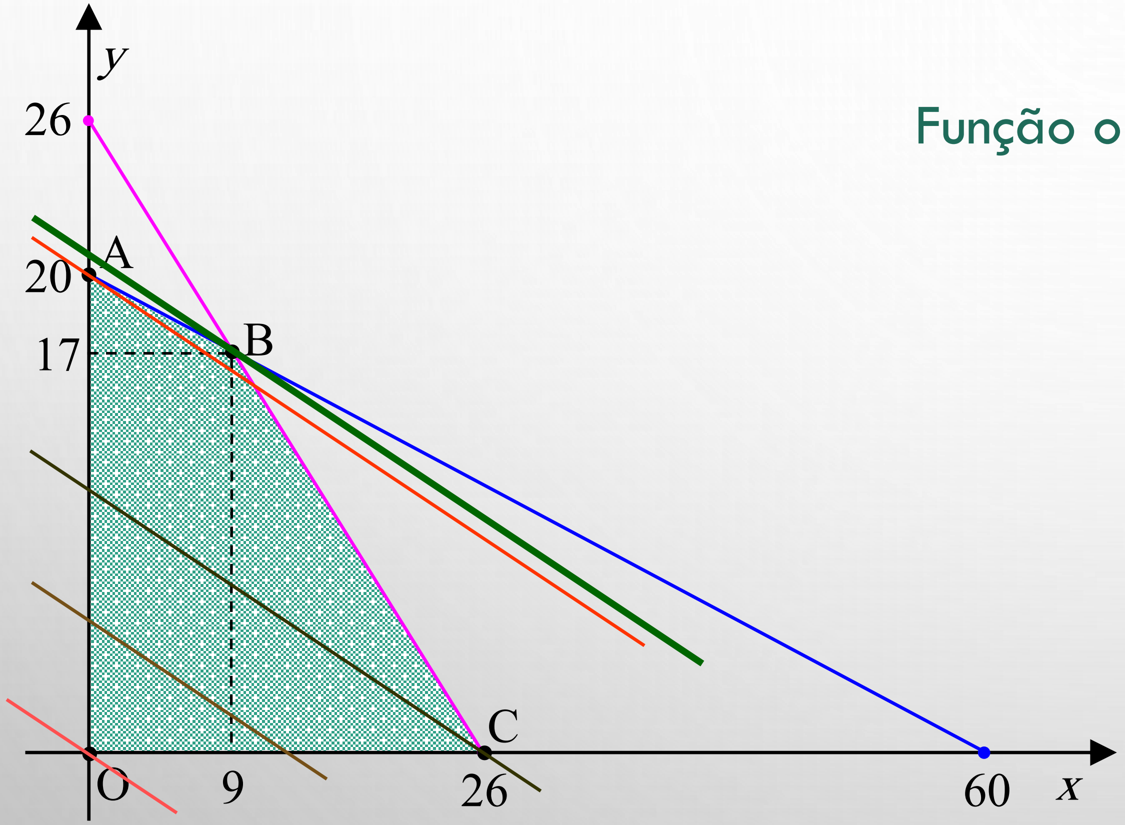
$$\mathrm{L}(x, y) = 40x + 60y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{L}(x, y)}{60} = \frac{40x}{60} + \frac{\cancel{60}y}{\cancel{60}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{\mathrm{L}(x, y)}{60}$$

Telensino

Retas de nível



Função objetivo $\mathrm{L}(x, y) = 40x + 60y$

$$\mathrm{L}(x, y) = 40x + 60y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{L}(x, y)}{60} = \frac{40x}{60} + \frac{\cancel{60}y}{\cancel{60}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{\mathrm{L}(x, y)}{60}$$