Proposta de trabalho – 2

d) No dia seguinte, no mesmo programa e à mesma hora, a rádio local desmentiu a notícia dada no dia anterior.

Admita que **as pessoas que ouviram o desmentido foram as mesmas que tinham ouvido a notícia no dia anterior**.

A propagação do desmentido pelos habitantes da povoação é dada por um modelo do tipo

$$D(t) = \frac{3,5}{1 + a \times e^{-kt}}$$, com $t \geq 0$ e D em **milhares**.

Sabe-se ainda que, **a propagação da notícia foi mais rápida do que o seu desmentido**.

Explique o que pode garantir sobre os valores de a e de k, por comparação com os valores correspondentes no modelo

$$N(t) = \frac{3,5}{1 + 8 \times e^{-0,25t}}.$$

Telensino

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 2
Resolução

Telensino

1.º Determinar o valor do parâmetro a

Ora $D\ 0 = N\ 0$

logo $$\frac{3,5}{1 + a \times \underbrace{e^{-k\times 0}}_{1}} = \frac{3,5}{1 + 8 \times \underbrace{e^{-0,25\times 0}}_{1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3,5}{1+a} = \frac{3,5}{1+8}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} + a = \cancel{1} + 8$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

Número de pessoas que ouviu a notícia é igual ao número de pessoas que ouviram o desmentido

Proposta de trabalho – 2
Resolução

Telensino

2.º Determinar o valor do parâmetro k

Por outro lado, dizem que a *propagação da notícia* foi **mais rápida** que o *desmentido*, logo $N(t) > D(t)$.

$$\frac{3,5}{1+8\times e^{-0,25t}} > \frac{3,5}{1+8\times e^{-kt}}$$

Calculado anteriormente

$$\Leftrightarrow \cancel{1}+8\times e^{-0,25t} < \cancel{1}+8\times e^{-kt}$$

Recordar

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ então $2 < 3$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{8}\times e^{-0,25t}}{\cancel{8}} < \frac{\cancel{8}\times e^{-kt}}{\cancel{8}} \Leftrightarrow e^{-0,25t} < e^{-kt}$$

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 2
Resolução

Telensino

Continuando

$$\Leftrightarrow e^{-0,25t} < e^{-kt} \Leftrightarrow -0,25t < -kt$$

As bases são iguais
e maiores que 1

$$\Leftrightarrow -0,25t + kt < 0 \quad \Leftrightarrow t\left(-0,25 + k\right) < 0$$

Como $t > 0$, então

$$\Leftrightarrow -0,25 + k < 0$$

$$\Leftrightarrow k < 0,25$$

R: $k \in \left]0;\ 0,25\right[$

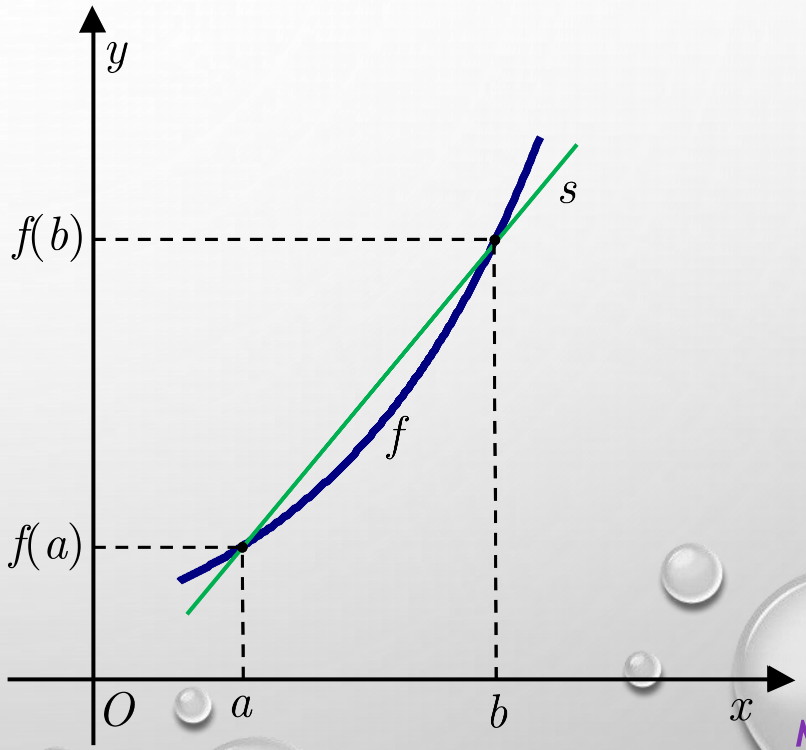
Matemática B
11.º ano

Taxa média de variação - revisão

A *taxa média de variação* de uma função f num intervalo $[a,\ b]$ é dada por,

$$t.m.v._{[a,\ b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

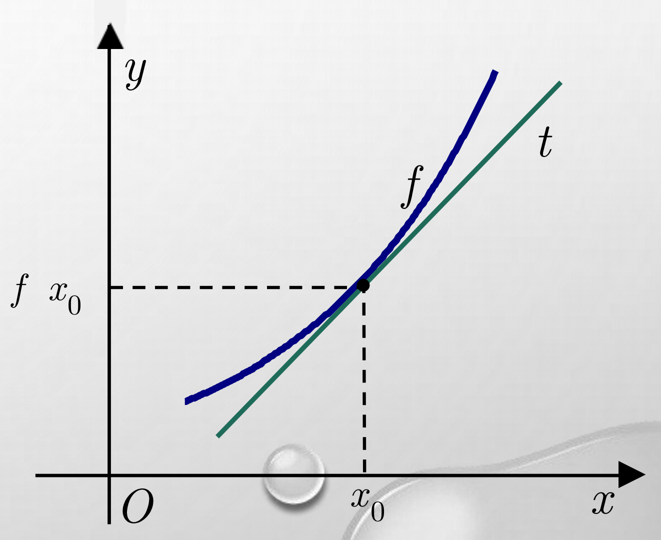
Observando a figura, conclui-se que a taxa média de variação no intervalo $[a,\ b]$, representa o **declive da reta secante** s ao gráfico de f , nos pontos de coordenadas $a,\ f(a)$ e $b,\ f(b)$.



Taxa de variação - revisão

A *taxa de variação* de uma função f real de variável real, em x_0, é o número real, caso exista, para o qual **tende** o quociente $\dfrac{f\ \ x_0+h\ \ -f\ \ x_0}{h}$, quando h **tende** para zero e pode ser representado por $f'\ \ x_0$.

Geometricamente, a taxa de variação da função f no ponto de abcissa x_0 representa o **declive da reta tangente** t ao gráfico de f no ponto de coordenadas $x_0,\ f\ \ x_0$.



$$\boldsymbol{m = f'\ \ x_0}$$

$f'\ \ x_0$ também é designado por derivada da função f no ponto de abcissa x_0 e representa-se por

$$f'\ \ x_0\ = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

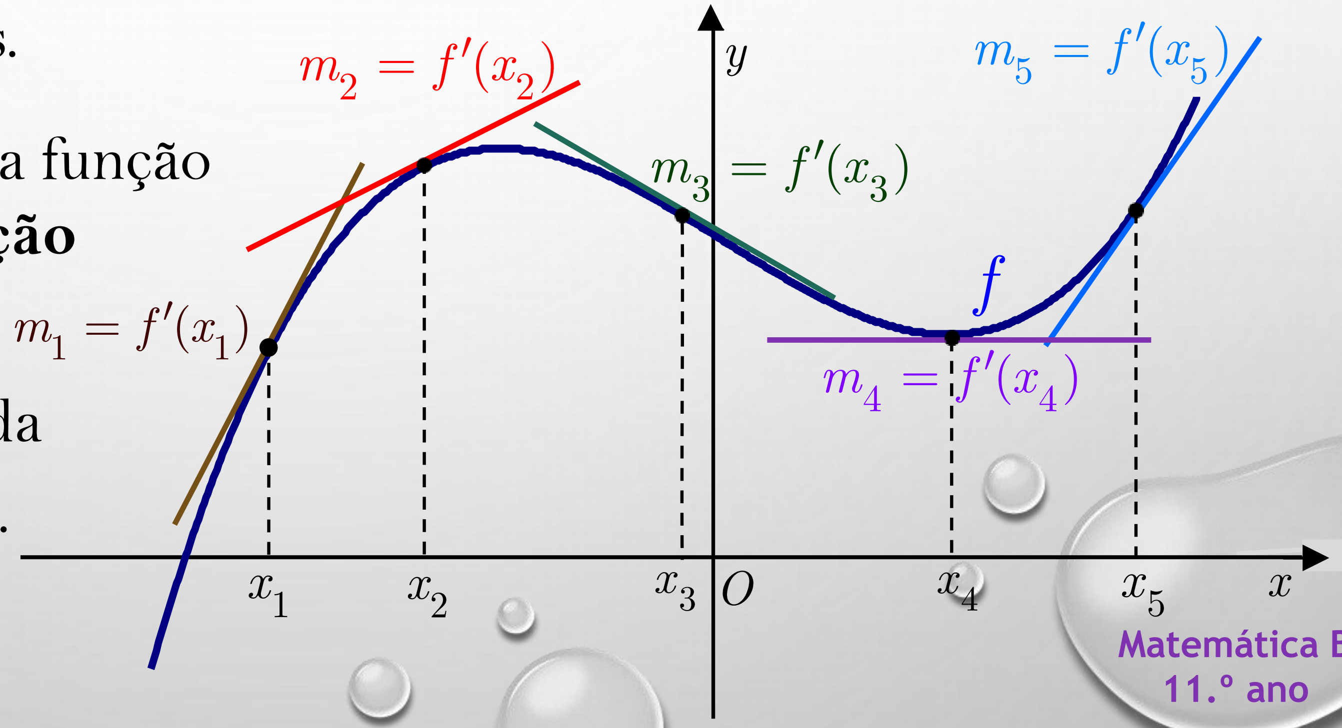
Telensino

Matemática B
11.º ano

Taxa de variação e monotonia

Observe a seguinte representação gráfica de uma função f .
Da observação do gráfico podemos concluir que:

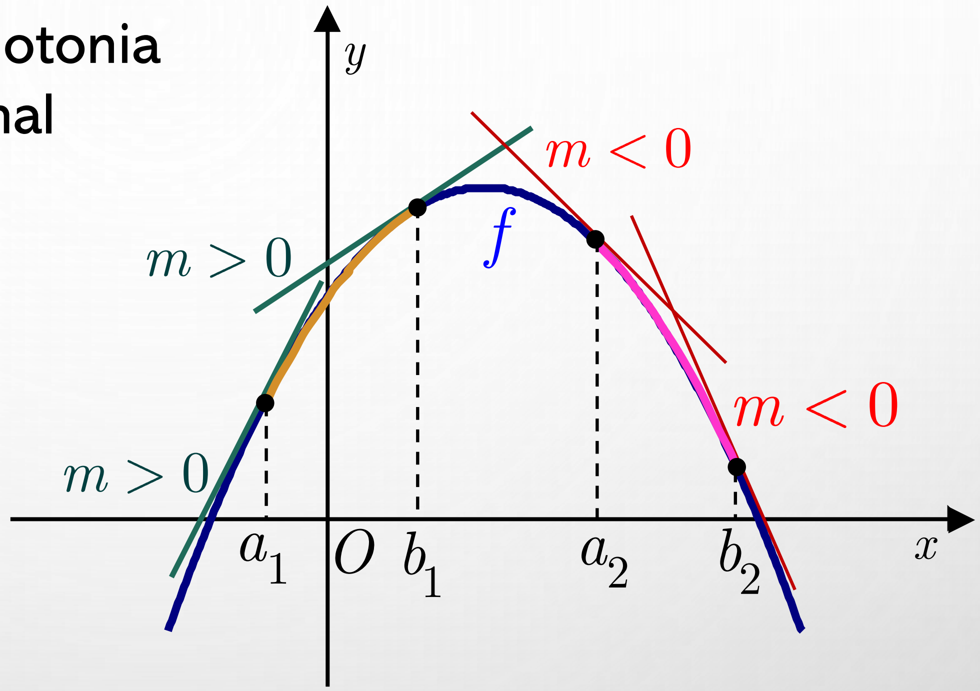
- Em x_1, x_2 e x_5, a **taxa de variação** da função f é **positiva** porque, m_1, m_2 e m_5 são positivos.
- Em x_2 a **taxa de variação** da função f é **inferior** à **taxa de variação** em x_1 $m_2 < m_1$.
- Em x_3 a **taxa de variação** da função f é **negativa** $m_3 < 0$.
- Em x_4 a **taxa de variação** da função f é **zero** $m_4 = 0$.



Matemática B
11.º ano

Taxa de variação e monotonia

Intuitivamente, verifica-se que a monotonia da função está relacionada com o sinal da taxa de variação.



Teorema

Seja f uma função contínua em $[a,\ b]$ e derivável em $]a,\ b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in \,]a,\ b[$, então f é estritamente crescente em $[a,\ b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in \,]a,\ b[$, então f é estritamente decrescente em $[a,\ b]$.

Proposta de trabalho – 1

Admita que a evolução da temperatura de uma substância numa experiência que durou 3 horas, obedece ao modelo $T(t) = 3t - 2^t,\ t \geq 0$, com T em graus Celsius e t em horas.

a) Calcule a temperatura da substância passado 1 hora de experiência e no final da mesma.
Interprete geometricamente o valor da $t.m.v._{[1,\ 3]}$.

Telensino

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 1

Telensino

b) Recorrendo à calculadora:

b1) Determine a **taxa de variação** da temperatura da substância no instante em que tinha decorrido 1h 45 min. desde o início da experiência. Interprete geometricamente e no contexto do problema o valor obtido.

1h 45min. são 1,75h, pois 45 min. são $\frac{3}{4}$ da hora (0,75h).

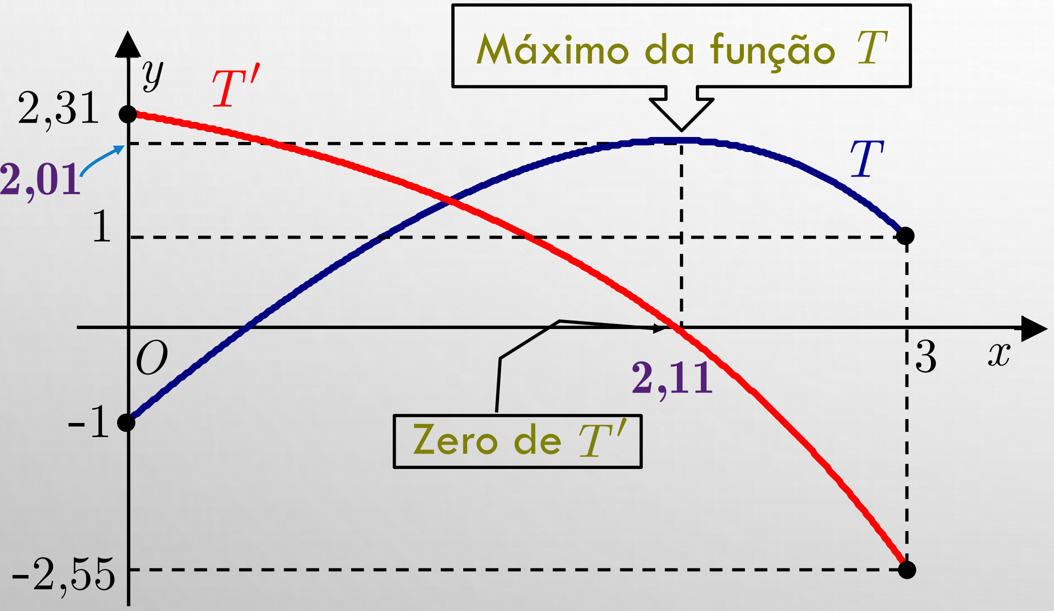
Vamos utilizar a calculadora: $\frac{d}{dx}\;3x-2^{x}\;{}_{x=1,75} \approx 0,67$

Geometricamente o valor obtido representa o **declive da reta tangente** ao gráfico de T, no ponto de abcissa 1,75.

No contexto do problema, significa que no instante 1,75 h de experiência, a temperatura da substância estava a aumentar aproximadamente 0,67° Celsius por hora.

Proposta de trabalho – 1

b2) Recorrendo à representação gráfica da função T e da respetiva **taxa de variação** T', conjeture quanto à variação e existência de extremos da função T.



x	0		2,11		3
T'	2,31	+	0	–	–2,55
T	–1	↗	2,01	↘	1

Podemos concluir que:

- T é crescente em $[0;\ 2{,}11]$
- T é decrescente em $[2{,}11;\ 3]$
- T tem um máximo em $2{,}01$ para $x = 2{,}11$

Matemática B
11.º ano