À procura dos extremos de uma função

Telensino

Seja f uma função real de variável real e $]a,\ b[$ um intervalo contido no domínio de f, tal que existe taxa de variação (derivada) em qualquer valor desse intervalo.

Se $c \in \,]a,\ b[$ e $f'(c) = 0$ (a taxa de variação em c é zero), em que condições se pode concluir que $f(c)$ é um extremo (máximo ou mínimo) da função?

Exemplos apoiados em representações gráficas ajudam a responder à questão colocada.

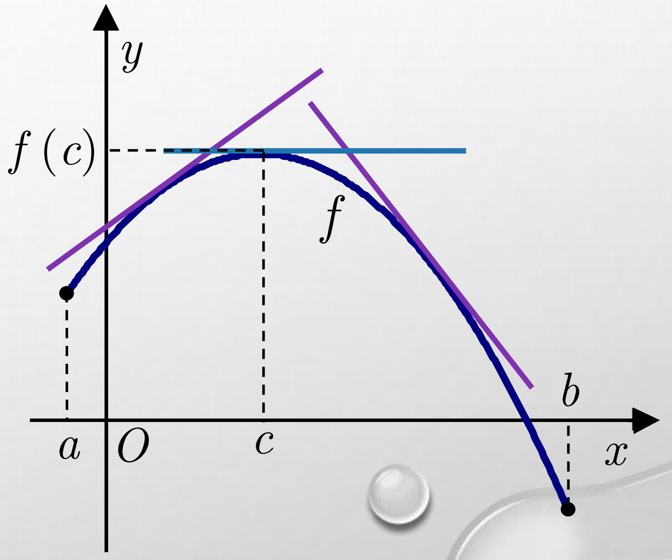
Matemática B
11.º ano

À procura dos extremos de uma função

Exemplo 1

Por observação do gráfico de uma função f e a partir dos declives das retas tangentes pode estabelecer-se uma relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função.

x	a		c		b
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(b)$



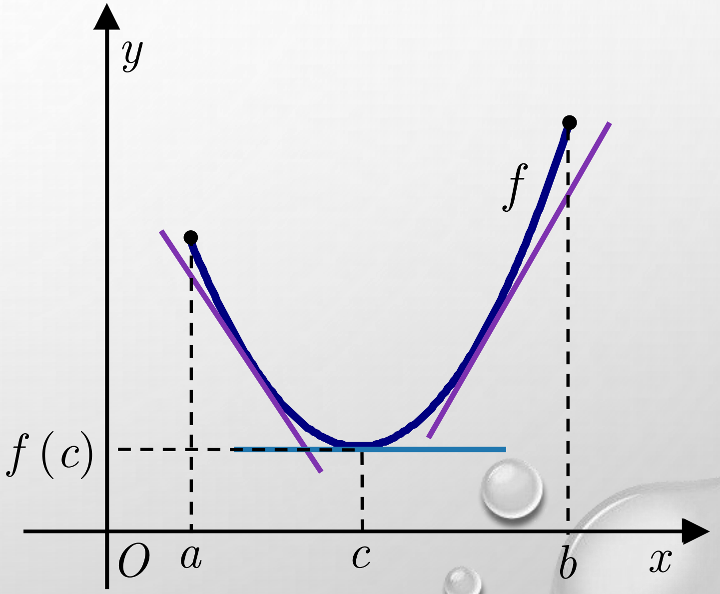
Neste caso, o $f(c)$ é um máximo da função, pois a taxa de variação à esquerda de c é positiva, em c anula-se e à direita de c é negativa.

À procura dos extremos de uma função

Exemplo 2

Por observação do gráfico de f e a partir dos declives das retas tangentes pode estabelecer-se uma relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função.

x	a		c		b
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$f(a)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(b)$



Neste caso, o $f\,(c)$ é um mínimo da função, pois a taxa de variação à esquerda de c é negativa, em c anula-se e à direita de c é positiva.

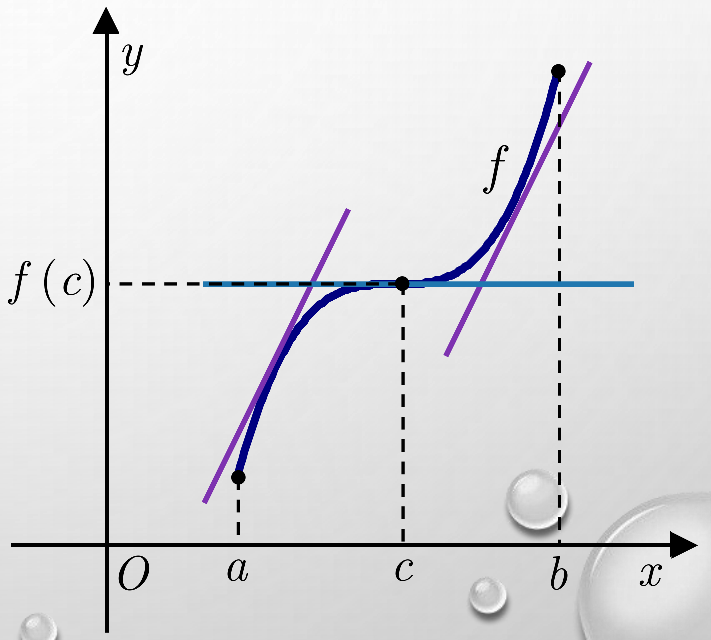
Matemática B
11.º ano

À procura dos extremos de uma função

Exemplo 3

Neste exemplo, a taxa de variação em $x = c$ é nula, no entanto, à esquerda de c e à direita de c, a taxa de variação mantém o mesmo sinal.

x	a		c		b
f'	$+$	$+$	0	$+$	$+$
f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(b)$



Neste caso, o $f\,(c)$ não é um extremo da função.

Proposta de trabalho – 1

De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota do seu gráfico e que a função dos declives das retas tangentes ao gráfico de f, é definida por $f'(x) = \log_3^2 x - \log_3 x$.

a) Determine os intervalos de monotonia de f e respetivos extremos.

Telensino

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 1

Telensino

$$f'(x) = \log_3^2 x - \log_3 x$$

- f é estritamente crescente em $]0,\ 1]$ e em $[3,\ +\infty[$
- f é estritamente decrescente em $[1,\ 3]$
- f tem máximo em $f\,(1)$
- f tem mínimo em $f\,(3)$

Proposta de trabalho – 1

b) Determine o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{1}{3}$.

$$f'(x) = \log_3^2 x - \log_3 x$$

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho – 1

c) Verifique se existe algum ponto do gráfico de f onde a reta tangente seja paralela à reta de equação $4y + x = 0$.

1.º $4y + x = 0$

$y = mx + b$
Eq. reduzida da reta

$r // s$
$m_r = m_s$

$\Leftrightarrow 4y = -x$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{x}{4}$

logo $m = -\dfrac{1}{4}$

Proposta de trabalho – 1

2.º $x = ?$

$m = f'(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\log_3^2 x - \log_3 x + 0,25 = 0}_{} \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1 \times 0,25}}{2\times 1}$$

$\Downarrow$

Eq. completa do 2.º grau na variável $\log_3 x$
com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0,25$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2} \vee \log_3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}} = x \underset{(1)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$$

(1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

R: Sim, existe um ponto de abcissa $\sqrt{3}$

Proposta de trabalho – 2

Para construir uma caixa com tampa, como a da figura, foi utilizada uma folha de cartão com a forma de um retângulo com 1,2 metros de comprimento e 0,8 metros de largura. (Fig. 1)
Foram retirados quatro quadrados de lado x centímetros e dois retângulos, como mostra a planificação (Fig. 2).

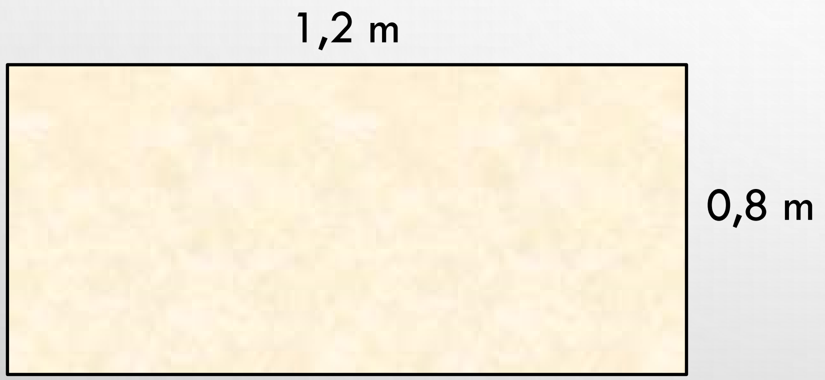


Fig. 1

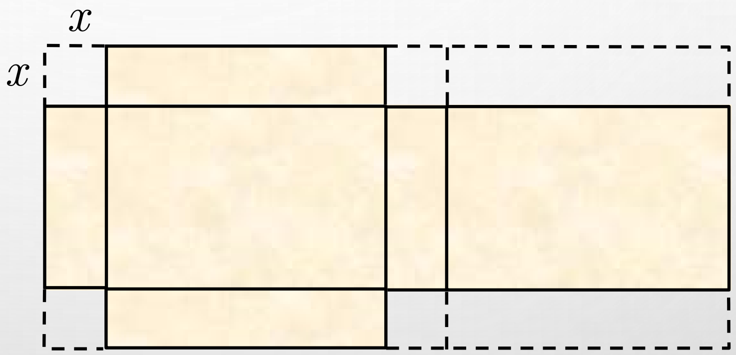


Fig. 2

Seja V a função que a cada valor de x, em centímetros faz corresponder o volume em centímetros cúbicos da caixa.

a) Determine, justificando, o domínio da função V no contexto do problema.

Matemática B
11.º ano